

В. Л. Якушев, Р. Р. Хусаинов

## ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МОЧЕВОГО ПУЗЫРЯ ЧЕЛОВЕКА

*Статья носит обзорно-постановочный характер и является основой для проведения вычислительных экспериментов по исследованию механических свойств мочевого пузыря. Рассматриваются трехмерные модели деформирования мочевого пузыря, ориентированные на использование метода конечных элементов. Используются нелинейные соотношения теории оболочек.*

**Вычислительный эксперимент, модель, механические свойства, мочевого пузыря.**

Изучение механических свойств мочевого пузыря с использованием моделирования представляет собой актуальную задачу, обусловленную распространенностью заболеваний мочевого пузыря, необходимостью уточнения результатов диагностики стандартными методами и оптимизации выбора тактики лечения. На это указывает, в частности, международная организация, занимающаяся исследованием вопросов удержания мочи (ICN — International Continence Society) [1].

### Схема функционирования мочевого пузыря

На рис. 1 показаны человеческие почки, мочеточники и мочевого пузырь [2], на рис. 2 — схема мочевого пузыря. Последний в фазе накопления выполняет функцию резервуара для мочи, в фазе мочеиспускания его стенки сокращаются при ослаблении мочевого сфинктера и моча вытекает из тела. Давление в полости мочевого пузыря  $P_v$  есть сумма величин детрузорного давления  $P_d$ , возникающего за счет деформации стенок мочевого пузыря, и внутрибрюшного давления  $P_b$  [2]:

$$P_v = P_d + P_b. \quad (1)$$

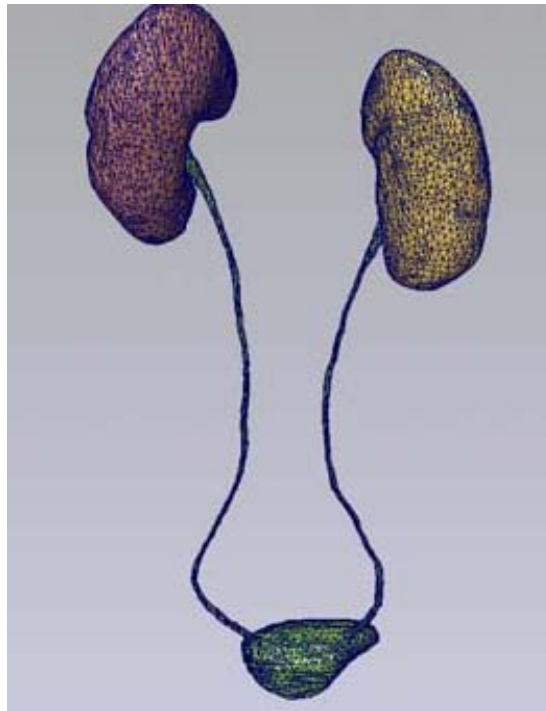
В фазе накопления мочи мочеудерживающая функция обеспечивается тем, что внутрипузырное давление всегда меньше внутриуретрального:  $P_u > P_v$ . Эта разница в давлениях называется запирающим давлением —  $P_c$ :

$$P_c = P_u - P_v. \quad (2)$$

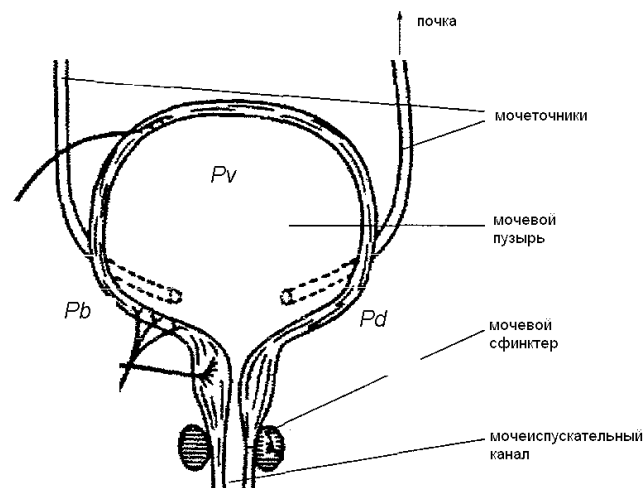
В эвакуаторную фазу происходит расслабление сфинктера уретры и внутриуретральное давление снижается с одновременным повышением внутрипузырного:  $P_u < P_v$ .

Внутрипузырное давление при опорожненном мочевом пузыре колеблется от 6,0 до 10,0 см. вод. ст. По мере заполнения мочевого пузыря давление в нем повышается на 2,0–4,0 см. вод. ст. на каждые 100 мл накопленной мочи и достигает при наполнении его до физиологической емкости (250–500 мл) величины около 12,0–15,0 см. вод. ст. [1]. Принимая во внимание, что почки выработывают мочу — 0,5–2 мл/мин или 60–70 мл/ч, можно констатировать, что

до достижения физиологической емкости пузыря моча накапливается 3–4 ч. Следовательно, здоровый взрослый человек должен производить мочеиспускание не чаще 8 раз в сутки. Удержание мочи в стадии накопления обеспечивается двумя основными факторами: низким детрузорным и высоким внутриуретральным давлением. Так, у здоровых женщин внутриуретральное давление в 8–14 раз больше детрузорного и составляет около 80–90 см. вод. ст. [1].



**Рис. 1.** Почки, мочеточники и мочевого пузырь человека (вид сзади) [2]



**Рис. 2.** Схема функционирования мочевого пузыря

### Основные уравнения

Существуют различные геометрические модели мочевого пузыря. В одной из них [3] границы стенок мочевого пузыря определяются двумя concentрическими эллипсоидами:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x}{a-d}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b-d}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{c-d}\right)^2 = 1, \quad (3)$$

где  $d$  — толщина стенки. Содержимое задается объемом внутреннего эллипсоида:

$$\left(\frac{x}{a-d}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b-d}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{c-d}\right)^2 < 1. \quad (4)$$

Для взрослого человека входящие в эти уравнения параметры могут быть приняты как [3]:

$$a = 4.96 \text{ см}, \quad b = 3.46 \text{ см}, \quad c = 3.46 \text{ см}, \quad d = 0.25 \text{ см}, \quad y_0 = -4.50 \text{ см}, \quad z_0 = 8.00 \text{ см}.$$

Другая модель [4] представляет собой оболочку вращения при осесимметричном нагружении (рис. 3), поэтому рассматривается, как правило, четверть оболочки, хотя можно рассматривать одну линию вдоль образующей. Мускулы моделируются линейными элементами как в осевом, так и в окружном направлении. Оболочка находится в безмоментном состоянии, т. е. изгибом пренебрегают. Но при этом необходимо учитывать влияние изменения геометрии пузыря при конечных перемещениях в процессе деформирования на напряженно-деформированное состояние. В этом случае для описания свойств мускульной ткани может быть использована модель Фанга [5, 6].

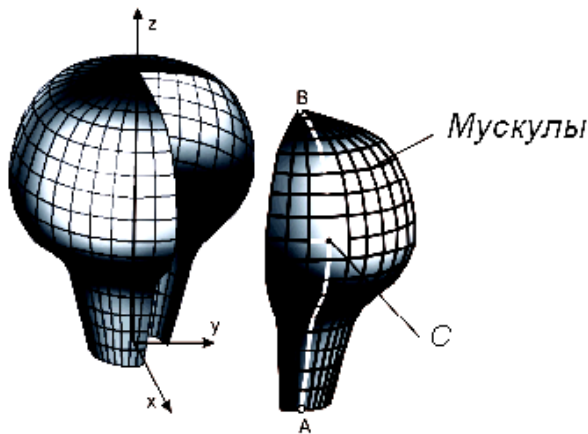


Рис. 3. Конечно-элементная модель мочевого пузыря [4]

Обозначим в некоторой точке  $C$  на рис. 3 через  $\sigma_1$  напряжения вдоль меридиана, а через  $\sigma_2$  — в окружном направлении. Предполагаем, что стенки мочевого пузыря подчиняются нелинейно-упругому закону. Для его описания используем удельный потенциал Фанга [5, 6]:

$$W = \frac{c}{2} \left[ \exp(a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + 2a_4 E_1 E_2) - 1 \right], \quad (5)$$

где  $c$  — размерная константа, имеющая размерность напряжения;  $a_1, a_2, a_4$  — безразмерные константы;  $E_1, E_2$  — компоненты деформаций тензора Грина — Лагранжа. Главные напряжения Пиолы — Кирхгофа равны:

$$S_1 = \frac{\partial W}{\partial E_1}, \quad S_2 = \frac{\partial W}{\partial E_2}. \quad (6)$$

Главные напряжения Коши  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  следуют из соотношений:

$$S_1 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1^2}, \quad S_2 = \frac{\sigma_2}{\lambda_2^2}, \quad (7)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — относительные удлинения [7]. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c \lambda_1^2 (a_1 E_1 + a_4 E_2) \exp(a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + 2a_4 E_1 E_2), \\ \sigma_2 &= c \lambda_2^2 (a_2 E_2 + a_4 E_1) \exp(a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + 2a_4 E_1 E_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Упругая матрица  $C_{ij}$  получается из соотношения

$$C_{ij} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial e_j}, \quad (9)$$

где  $e_j$  — малые деформации, отнесенные к начальной конфигурации. Кроме того, имеют место соотношения:

$$\frac{\partial E_i}{\partial \lambda_i} = \lambda_i, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \lambda_i} = \lambda_i. \quad (10)$$

Предполагается, что в начальном состоянии мышцы не создают дополнительного детрузорного давления  $P_d$  и напряжения в них равны нулю.

В расчетах, представленных в работе [4], было принято:

$$c = 0.003372 \text{ МПа}, \quad a_1 = 0.6, \quad a_2 = 0.43, \quad a_4 = 0.49.$$

Данные об экспериментах по определению механических свойств стенок мочевого пузыря приведены в работе [8]. Определялись прочностные характеристики внутренних органов таза, таких как мочевой пузырь и прямая кишка. Испытывались продольные и поперечные полоски ткани из мочевого пузыря размером  $50 \times 20 \times 5$  (мм) при одноосном растяжении. Были установлены зависимости величины удлинения  $D$  от величины прикладываемой силы  $P$ .

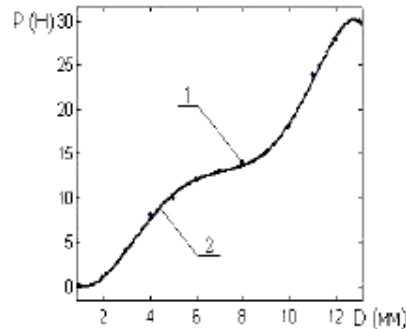
На основе экспериментальных данных были подобраны полиномиальные функции, отражающие зависимость удлинения мягких тканей от приложенной нагрузки. Для продольной полоски препарата из мочевого пузыря размером  $50 \times 20 \times 5$  (мм) было получено:

$$P = -0.002D^6 + 0.005D^5 - 0.02D^4 - 0.32D^3 + 3.1D^2 - 5.83D + 3.1. \quad (11)$$

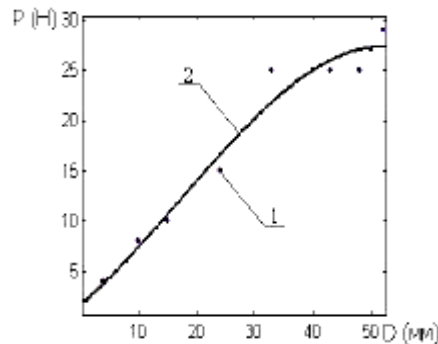
Для поперечной полоски препарата из мочевого пузыря размером 50×20×5 (мм)

$$P = -0.0002D^3 + 0.009D^2 + 0.5D + 1.6. \quad (12)$$

Экспериментальные данные представлены на рис. 4 и 5 в виде точек 1, а полиномиальные функции (зависимость деформации мягких тканей от приложенной нагрузки) — в виде графиков 2.



**Рис. 4.** Экспериментальные данные по испытанию продольной полоски из мочевого пузыря



**Рис. 5.** Экспериментальные данные по испытанию поперечной полоски из мочевого пузыря

Для включения данной модели в комплекс, например, почки — сердечно-сосудистая система следует учитывать динамические свойства мочевого пузыря и влияние простаты.

Для разработки комплексных моделей управления процессом мочеиспускания необходима динамическая модель. Простейший вариант такой модели, предложенной в [9], в результате некоторого преобразования представляет собой уравнение

$$DU/Dt = -DU^2/DS^2 - (1/\rho DP/DS + gDZ/DS),$$

где:  $U$  — скорость мочеиспускания;  
 $S$  — переменная расстояния;  
 $P$  — давление высоты столба;

- $p$  — плотность жидкости;  
 $g$  — ускорение свободного падения.

Понятно, что такая модель не отражает даже функцию процессов. Например, давление является более сложной величиной. Но даже в этом случае линейного описания динамики необходимость учета динамических свойств очевидна.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасов Н. И., Миронов В. Н. Современная догоспитальная диагностика и лечение недержания мочи у женщин: Учеб.-метод. пособие. — Челябинск, 2003.
2. Tonar Z., Zbítura F., Grill R. Surface morphology of kidney, ureters and urinary bladder models based on data from the visible human male // Biomed. — 2004. — P. 249–251.
3. Евсеенко Л. В., Куракин А. А., Тултаев А. В., Черняев А. П. Математическая модель фантома человека в радионуклидной диагностике и терапии: Препр. 24/708 / НИИЯФ МГУ. — 2002.
4. Vlastelica I., Veljkovic D., Rankovic V., Stojanovic B., Rosic M., Kojic M. Modeling of Urinary Bladder Deformation Within Passive and Active Regimes // Journ. of the Serbian Society for Computational Mechanics. — 2007. — Vol. 1, No. 1. — P. 129–134.
5. Fung Y. C., Fronek K., Patitucci P. Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression // Am. J. Physiol. — 1979. — 237. — H620–H631.
6. Fung Y. C. Biomechanics — Motion, Flow, Stress, and Growth. — Springer-Verlag, N. Y., 1990.
7. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. — 3-е изд. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
8. Борозда И. В., Бушманов А. В. Исследование биомеханических параметров внутренней полости таза // Медицинская информатика. — 2005. — № 1 (9). — С. 74–79.

V. L. Yakushev, R. R. Khusainov

### QUESTIONS OF MODELING MAN'S URINARY BLADDER

*The present article is of review and formulation nature, serving a foundation to make further computational experiments investigating mechanical properties of a urinary bladder. It considers three-dimensional models of bladder deformation meant using a method of finite elements. Subject to application being non-linear relations of membrane theory.*

**Computational experiment, model, mechanical properties, urinary bladder.**