

**В. Р. Цибульский, О. И. Сергейчик, М. В. Абрамов**

## **МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКГ**

*Предложены варианты математической модели функционирования сердца и сердечно-сосудистой системы человека и варианты получения передаточной функции с последующей оценкой устойчивости моделей.*

Одной из главных причин высокой смертности в развитых странах являются заболевания сердечно-сосудистой системы. Рост количества людей в среднем и пожилом возрасте с заболеваниями сердца — важная проблема в современном здравоохранении. Выявление таких заболеваний на ранних стадиях затрудняется тем, что основным его методом по сей день остается визуальный анализ электрокардиограммы врачом-специалистом.

Применение компьютерных вычислительных пакетов для оценки оцифрованного сигнала ЭКГ по какому-либо параметру [11] позволяет уменьшить время и повысить точность анализа результатов обследования. Затруднение при этом заключается в отсутствии математической модели сердечной деятельности, которая охватывает определяющие процессы в сердце.

Основной моделью, описывающей работу сердца с учетом ряда возможных патологий, можно считать четырехкамерную динамическую модель сердца, связывающую более двадцати параметров, основными из которых являются давление и объем в камерах сердца, кровотоки между отдельными камерами [12]. При этом учитываются закон сохранения массы крови, перемещаемой между желудочками и предсердиями, с использованием принятых в физиологии формул Пуазейля для определения кровотока; состояния клапанов сердца, и, таким образом, может быть построена общая динамическая модель кровеносной системы [12].

Представляет интерес и модель, описывающая напряженно-деформированное состояние стенок сердца [1]. Она позволяет оценить нагрузку на ту или иную часть сердца, определить вероятность превышения нагрузки и возможной дисфункции при тех или иных состояниях человеческого организма.

Более сложная модель, описывающая взаимодействия всех элементов сердца [6], обусловлена системой закономерностей, фундаментальных в физиологии. Эта модель учитывает ряд патологий и включает в себя уравнения основных процессов сердечной деятельности: механики сердечной мышцы, сокращения и возбуждения отделов сердца, гомеометрической саморегуляции, геометрии сердца, работы клапанов сердца. Причем при таком большом объеме закономерностей дифференциальные уравнения модели имеют довольно простой вид. Автором дано описание программной реализации модели.

Охарактеризованные модели не позволяют достаточно просто оценить, например, устойчивость функционирования сердца. В данной статье предлагается получить модель на основе передаточной функции [2, 3]. Ее можно представить, если рассматривать сердце как объект управления, находящийся в режиме самовозбуждения [7]. Передаточная функция системы (сердца) может быть получена через частотную характеристику.

В общем виде передаточная функция  $W(p)$  определяется как отношение изображений выходной характеристики  $Y(p)$  к входной (управляющей)  $U(p)$ :

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}. \quad (1)$$

Нормированный вид передаточной функции:

$$W(p) = k \cdot \frac{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_m \cdot p^m}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}, \quad (2)$$

где  $k$  — коэффициент усиления;  $a_i, b_i$  — коэффициенты передаточной функции;  $p$  — оператор дифференцирования.

Важным свойством передаточной функции является взаимосвязь между ней и временной (или импульсной переходной) характеристикой объекта, выраженная следующей формулой:

$$W(p) = L[h(t)], \quad (3)$$

где  $h(t)$  — импульсная переходная характеристика.

Вместе с тем существует ряд объектов управления, определить передаточную функцию которых затруднительно. Примером такого объекта является сердце человека. Идентификация передаточной функции сердца классическим путем, т. е. со входом и выходом, невозможна, так как в данном случае сложно определить, что является входом ( $U(p)$ ).

Предлагается несколько вариантов определения передаточной функции работы сердца:

1. Предположим, что при остановке сердца у больного дается короткий и мощный импульс, после чего работа сердца возобновляется и наблюдается ЭКГ. Используя импульсную переходную характеристику и частотную характеристику ЭКГ пациента, перенесшего остановку и запуск сердца, получаем передаточную функцию на основании формулы (3).

2. Переход от модели сердца к моделям кардиологических процессов, которые вызывают отклонения или, проще говоря, заболевания. В этом случае за вход  $U(p)$  можно принять ЭКГ [4] и ее спектр у пациента в норме, а за выход  $Y(p)$  — ЭКГ и ее спектр у больного того же возраста [9]. Частотная переходная функция будет представлена отношением частотных характеристик выхода и входа. При использовании нормальной ЭКГ получаем модель болезни и оценка устойчивости улучшения состояния будет другая, может быть некая среднеквадратическая характеристика, стремящаяся к нулю.

3. Использование методики определения передаточной функции через модель генератора, например RC [8]. В качестве исследуемой берется одна из известных RCL-моделей. Отличие будет лишь в том, что в нормальном состоянии амплитуда, форма ЭКГ и частота стабильны, значит, для модели больного, возможно, следует ввести нелинейную обратную связь [8].

Рассмотрим первый метод подробнее.

Суть метода заключается в получении на выходе объекта временных (или импульсных переходных) характеристик при подаче ступенчатого или импульсного сигнала на входе. Неизвестные параметры передаточной функции определяются либо исходя из связи передаточной функции и импульсной переходной характеристики (3), определяющей передаточную функцию как изображение по Лапласу импульсной переходной характеристики, либо с помощью методов идентификации параметров [10].

Помимо данных методов, для выходных сигналов, имеющих периодический вид, возможен метод получения передаточной функции на основе частотных характеристик ЭКГ, полученных методом Фурье [2, 5, 11]. Основываясь на последнем, можно сформулировать следующий алгоритм:

1. Получение спектра сигнала при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (периодограмма).
2. Получение аналитической записи сигнала — ряд Фурье.
3. Получение передаточной функции посредством преобразования Лапласа, примененного к данному ряду Фурье.

Аналитическая запись сигналов в виде ряда Фурье будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n \cdot t) + b_n \sin(\omega_n \cdot t)). \quad (4)$$

Для простоты получения первого результата выберем линейную модель, для которой справедлив принцип суперпозиции и любые возмущения можно свести к одному входу.

Преобразование Лапласа для формулы (4) с учетом удаленного среднего будет представлять собой сумму дробей вида

$$L[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cdot p + b_n \cdot \omega_n}{p^2 + \omega_n^2}. \quad (5)$$

Основываясь на формуле (3), при условии что  $x(t)$  — импульсная переходная характеристика, можно говорить о том, что выражение (5) является передаточной функцией  $W(p)$ .

Поскольку количество частот может быть бесконечным, о чем говорит верхний предел суммирования, то главным вопросом при использовании данного метода является определение набора частот, которые адекватно определяют систему.

Пусть верхний предел равен  $N$ , тогда выражение (5) можно представить в следующем виде:

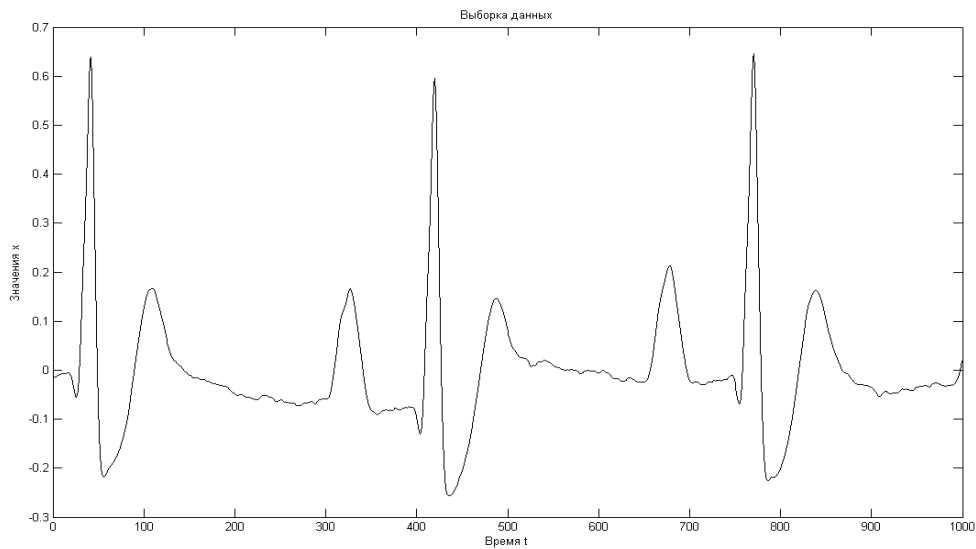
$$W(p) = K \cdot \frac{A_0 \cdot p^{2(N-1)} + A_1 \cdot p^{2(N-2)} + \dots + A_{2(N-2)} \cdot p^2 + 1}{B_0 \cdot p^{2N} + B_1 \cdot p^{2(N-1)} + \dots + B_{N-1} \cdot p^2 + 1}. \quad (6)$$

Выражение (6) имеет тот же вид, что и выражение (2). Степенью данной передаточной функции является удвоенное значение количества частот, выбранных для описания системы моделью (5).

Получив передаточную функцию системы, можно использовать различные методы для анализа ее устойчивости. К ним можно отнести критерий Ляпунова, Гурвица, Найквиста и др. [3].

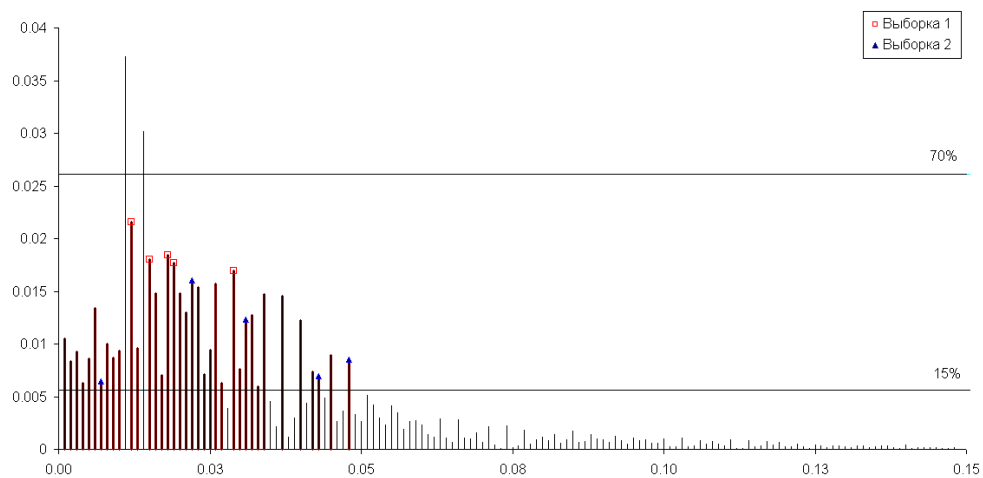
В качестве иллюстрации применения метода предлагается пример получения передаточной функции реальной ЭКГ больного.

На рис. 1 приведен вид электрокардиограммы больного, перенесшего остановку и запуск сердца (данные из Тюменского кардиологического центра). Этот сигнал можно считать выходной характеристикой сердца.



**Рис. 1.** Электрокардиограмма больного

Для него получен спектр по алгоритму БПФ, для 500 частот. Амплитудно-частотная характеристика (для нижних частот) представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Амплитудно-частотная характеристика электрокардиограммы

Для упрощения определения передаточной функции предложенным методом выберем всего пять частот, ограничив спектр на уровне 15 % от максимальной амплитуды. На рис. 2 эти частоты отмечены более жирными линиями, значения их амплитуд приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Параметры передаточной функции на основе первой выборки частот**

$i$	$\omega_i$	$a_i$	$b_i$
1	0,012	0,016529072	-0,013810079
2	0,015	-0,01749109	-0,004379352
3	0,018	0,002004919	0,018348789
4	0,019	0,009302966	0,015070977
5	0,029	0,001980545	-0,016824831

Передаточная функция сердца при данной выборке определяется выражением

$$W(p) = \frac{7,7 \cdot 10^{16} \cdot p^9 - 6,42 \cdot 10^{14} \cdot p^8 + 1,2 \cdot 10^{14} \cdot p^7 + 2,75 \cdot 10^{11} \cdot p^6 + 6,47 \cdot 10^{10} \cdot p^5 + 6,25 \cdot 10^{18} \cdot p^{10} + 1,18 \cdot 10^{16} \cdot p^8 + 8,05 \cdot 10^{12} \cdot p^6 + 2,52 \cdot 10^9 \cdot p^4 + 2,5 \cdot 10^8 \cdot p^4 + 1,53 \cdot 10^7 \cdot p^3 + 1,51 \cdot 10^4 \cdot p^2 + 1,42 \cdot 10^3 \cdot p - 4,19}{+ 3,67 \cdot 10^5 \cdot p^2 + 19,9} \quad (7)$$

Основываясь на утверждении о том, что реальные части корней характеристического уравнения устойчивой системы лежат в отрицательной полуплоскости [3], найдем решения данного уравнения для полученной модели.

Полагая систему замкнутой, запишем характеристическое уравнение [3]:

$$1 + W(p) = 0 \quad (8)$$

Решения уравнения (8) для данной выборки приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Корни характеристического уравнения первой выборки**

№	$P$
1	$-0,01 \pm 0,023i$
2	$-2,995 \cdot 10^{-3} \pm 7,845 \cdot 10^{-3}i$
3	$1,205 \cdot 10^{-4} \pm 0,018i$
4	$1,076 \cdot 10^{-3} \pm 0,015i$
5	$5,661 \cdot 10^{-3} \pm 0,026i$

Поскольку есть реальные части корней характеристического уравнения, которые лежат в положительной полуплоскости, мы не можем говорить о том, что работа сердца устойчива.

Вместе с тем при выборе других частот можно получить совсем иной результат. Выберем частоты, относительно равномерно распределенные по всему диапазону (табл. 3).

Таблица 3

**Параметры передаточной функции на основе второй выборки частот**

$i$	$\omega_i$	$a_i$	$b_i$
1	0,007	0,006378	-0,0006
2	0,022	0,015886	-0,00201
3	0,031	0,012162	-0,002
4	0,043	0,006931	0,000316
5	0,048	0,008406	-0,00127

Передачная функция сердца при данной выборке определяется выражением

$$W(p) = \frac{1,94 \cdot 10^{16} \cdot p^9 - 6,16 \cdot 10^{13} \cdot p^8 + 8,95 \cdot 10^{13} \cdot p^7 - 2,71 \cdot 10^{11} \cdot p^6 + 1,32 \cdot 10^{11} \cdot p^5 - 3,9 \cdot 10^{17} \cdot p^{10} + 2,2 \cdot 10^{15} \cdot p^8 + 4,3 \cdot 10^{12} \cdot p^6 + 3,37 \cdot 10^9 \cdot p^4 + -3,79 \cdot 10^8 \cdot p^4 + 6,61 \cdot 10^7 \cdot p^3 - 1,66 \cdot 10^5 \cdot p^2 + 6,94 \cdot 10^3 \cdot p - 9,89}{+ 9,29 \cdot 10^5 \cdot p^2 + 37,9} \quad (9)$$

Решения характеристического уравнения (8) для новой выборки приведены в табл. 4.

Таблица 4

**Корни характеристического уравнения второй выборки**

№	$P$
1	-0,028
2	$-6,851 \cdot 10^{-3}$
3	$-4,135 \cdot 10^{-3} \pm 0,011i$
4	$-1,814 \cdot 10^{-3} \pm 0,041i$
5	$-1,082 \cdot 10^{-3} \pm 0,028i$
6	$-4,11 \cdot 10^{-4} \pm 0,046i$

Поскольку реальные части корней характеристического уравнения отрицательны, мы можем говорить о том, что после запуска сердце работает устойчиво.

На основании приведенных примеров можно говорить о том, что применение данного метода возможно, но основной трудностью является правильный выбор частот, использование которых позволяет описать адекватную модель. Для более уверенной оценки необходимо исследование всех методов получения передачной функции, предложенных выше.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *Бегун П. И., Афонин П. Н.* Моделирование в биомеханике: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2004. — 390 с.
2. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. д-ра физ.-мат. наук В. Е. Привальского; Под ред. И. Н. Коваленко — М.: Мир, 1989. — 540 с.
3. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. — Изд. 4-е, перераб. и доп. — СПб.: Профессия, 2003. — 752 с.
4. *Вартак Ж. М.* Интерпретация электрокардиограммы. — М.: Медицина, 1978. — 152 с.
5. *Марпл К. (мл.).* Современные методы спектрального анализа // ТИИЭР. — 1981, ноябрь. — Т. 69, № 11.
6. *Мосткова Е. В.* Математическая модель сердца // Клиническая физиология кровообращения. — 2006. — № 4. — С. 26.
7. *Парашин В. Б., Иткин Г. П.* Биомеханика кровообращения: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 224 с.
8. *Ройтман М. С.* Принципы построения, вопросы теории и практики прецизионных источников переменных напряжений: Автореф. ... дис. д-ра техн. наук. — Томск, 1971.
9. *Рычкова А. Ю., Цибульский В. Р., Сергейчик О. И., Копылова Л. Н.* Спектральный анализ нормальной ЭКГ // Вестн. аритмологии. — 2004. — № 35. — С. 52.
10. *Сарычев А., Искандеров Г.* Методы идентификации объектов управления на

основании результатов активного эксперимента // Материалы XXXI науч. конф. по результатам работы ППС / Северо-Кавказский гос. техн. ун-т. — Режим доступа: <http://www/ncstu.ru/Science/conf/past/2001/xxxii/14/19.pdf>, свободный.

11. *Сергейчик О. И.* Модели и алгоритмы спектрального анализа обработки кардиологических временных рядов: Автореф. ... дис. канд. техн. наук. — Тюмень, 2007.

12. *Холодов А. С.* некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // Компьютерные модели и прогресс медицины / Под ред. О. М. Белоцерковского. — М.: Наука, 2001. — 300 с.

*V. R. Tsibulsky, O. I. Sergeychik, M. V. Abramov*

*METHODS OF OBTAINING TRANSFER FUNCTION BASING  
ON FREQUENCY CHARACTERISTICS OF ELECTROCARDIOGRAM*

*The article suggests alternatives of a mathematical model with respect to man's heart and cardiovascular system together with variants of obtaining transfer function with a subsequent evaluation of stability of these models.*