

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Р. Р. Хусаинов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА

Статья посвящена численному решению нелинейной задачи деформирования роговицы глаза при ее нагружении равномерным давлением по ограниченной центральной области. Такой вид нагружения соответствует нескольким методам измерения внутриглазного давления. Роговица представляется как осесимметрично деформируемая оболочка вращения с жестким закреплением по краям. Для описания ее напряженно-деформируемого состояния используется система из шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение по нагрузке ведется пошаговым методом. Исследовано влияние толщины роговицы на перемещения ее поверхности.

Введение

Внутриглазное давление является очень важной характеристикой состояния глаза с медицинской точки зрения. Оно определяет многие процессы внутри глаза, а его уровень часто позволяет судить о развитии патологических процессов, например глаукомы или помутнения водянистой влаги и стекловидного тела. Сегодня широко применяются аппланационные методы измерения внутриглазного давления [1, 2], сводящиеся к деформации глаза путем некоторого механического стандартного воздействия. О давлении судят по перемещениям роговицы, однако на их величину могут оказывать существенное влияние механические свойства роговицы, ее толщина, размер глаза и т. п., которые в большинстве случаев остаются не известными. Поэтому представляет интерес численное исследование влияния этих характеристик на деформацию роговицы. При этом в большинстве случаев роговицу и склеру глаза рассматривают как тонкостенные оболочки.

1. Нелинейные уравнения теории оболочек вращения

В системе координат x, y, θ рассмотрим [5, 6] осесимметрично нагруженную оболочку вращения толщины h , срединная поверхность которой получена в результате вращения плоской кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$ относительно оси y (рис. 1). Координаты срединной поверхности x, y , угол наклона φ между касательной к срединной поверхности и осью x , радиусы кривизны в меридиональном r_1 и окружном r_2 направлениях являются известными функциями длины дуги срединной линии s . Соответствующие величины в недеформированном состоянии отмечаются индексом «ноль». Нормаль к срединной поверхности направим так, чтобы касательная и нормаль составляли правую систему координат [5].

Деформации на расстоянии z по нормали от срединной поверхности вдоль меридиана \mathcal{E}_φ и в окружном направлении \mathcal{E}_θ на основании гипотез Кирхгофа — Лява равны:

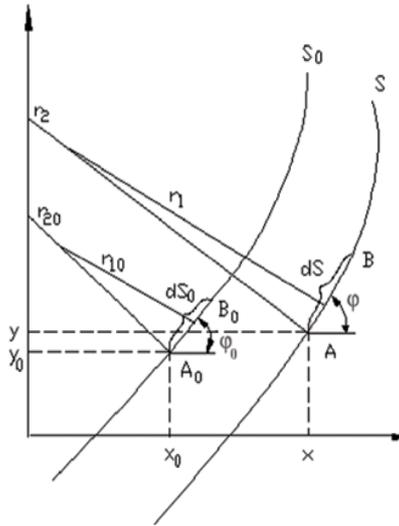


Рис. 1. Начальная (с индексом «ноль») и конечные формы оболочки

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_1 - zk_1, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_2 - zk_2, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{ds}{ds_0} - 1, \quad k_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{10}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{x}{x_0} - 1, \quad k_2 = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{x_0}. \quad (1.2)$$

Координаты срединной поверхности в деформированном состоянии определяются уравнениями:

$$\frac{d\varphi}{ds_0} = k_1 + \frac{1}{r_{10}}, \quad \frac{dx}{ds_0} = (1 + \varepsilon_1) \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds_0} = (1 + \varepsilon_1) \sin \varphi. \quad (1.3)$$

Кроме того, должны выполняться условия совместности деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_2}{ds_0} = \frac{1}{x_0} [(1 + \varepsilon_1) \cos \varphi - (1 + \varepsilon_2) \cos \varphi_0], \quad \frac{dk_2}{ds_0} = \frac{1}{x_0} \left[\left(\frac{d\varphi_0}{ds_0} + k_1 \right) \cos \varphi - \left(\frac{d\varphi_0}{ds_0} + k_2 \right) \cos \varphi_0 \right]. \quad (1.4)$$

Уравнения равновесия в случае малых смещений и углов поворота записываются для деформированного состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_\varphi}{ds_0} + (1 + \varepsilon_1) \frac{N_\theta \sin \varphi + Q_\varphi \cos \varphi}{x} + N_\varphi \left(k_1 + \frac{d\varphi_0}{ds_0} \right) + p_z &= 0, \\ \frac{dN_\varphi}{ds_0} + (1 + \varepsilon_1) \frac{N_\varphi - N_\theta}{x} \cos \varphi - Q_\varphi \left(k_1 + \frac{d\varphi_0}{ds_0} \right) + p_\varphi &= 0, \\ \frac{dM_\varphi}{ds_0} + (1 + \varepsilon_1) \frac{M_\varphi - M_\theta}{x} \cos \varphi - Q_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где Q_φ — поперечная сила, N_φ и N_θ — нормальные силы, M_φ и M_θ — изгибающие моменты, p_φ и p_z — соответственно касательная и нормальная к срединной поверхности, составляющие внешней распределенной нагрузки.

Решение задачи будем вести на основе метода дополнительной [6]. Простейшей моделью ползучести, позволяющей смоделировать непрерывный процесс перехода от докритического к закритическому состоянию без учета инерционных сил, является тело Фойхта:

$$s_{ij} = 2G(\tau\dot{e}_{ij} + e_{ij}), \quad K\sigma = \tau\dot{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

где e_{ij} и s_{ij} — девиаторы деформаций и напряжений. Точка над переменной означает дифференцирование по времени t , а τ — постоянная.

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad K = \frac{1-2\nu}{E}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.7)$$

где ε_{ij} и σ_{ij} — соответственно компоненты тензоров деформаций и напряжений, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. При $\dot{e}_{ij} = 0$ получаем закон Гука.

При введении реологической вязкости, согласно (1.6), получаем выражения для нормальных сил и моментов:

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \tau(\dot{\varepsilon}_1 + \nu\dot{\varepsilon}_2)], \quad M_\varphi = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[k_1 + \nu k_2 + \tau(\dot{k}_1 + \nu\dot{k}_2)], \quad (1.8)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + \tau(\dot{\varepsilon}_2 + \nu\dot{\varepsilon}_1)], \quad M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[k_2 + \nu k_1 + \tau(\dot{k}_2 + \nu\dot{k}_1)]. \quad (1.9)$$

В силу приближенности теории оболочек в ней нет необходимости в выражении для связи между силой Q_φ и сдвиговой деформацией. Замкнутая система уравнений получается и без этого соотношения. Но для того, чтобы иметь единообразные выражения типа (1.8) и (1.9) для всех силовых факторов, которые необходимы для записи разрешающей системы уравнений, по аналогии с (1.8) для поперечной силы Q_φ формально вводится величина γ [6]:

$$Q_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\gamma + \tau\dot{\gamma}). \quad (1.10)$$

Построение разрешающей системы уравнений осуществлялось в такой последовательности [6]. Выражения для сил и моментов (1.8)–(1.9) подставлялись в уравнения равновесия (1.5). Производные $\partial^2\varepsilon_2/\partial s_0\partial t$ и $\partial^2k_2/\partial s_0\partial t$ брались из продифференцированных по t соотношений совместности (1.4). Аналогично находились $\partial\varepsilon_2/\partial t$ и $\partial k_2/\partial t$ из (1.2).

Другие три уравнения были получены после дифференцирования по t выражений для координат срединной поверхности (1.3) и последующего сложения с ними в исходной форме.

В результате была получена система шести уравнений в частных производных, ее вид соответствует канонической форме уравнений гиперболического типа [4]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial t} + A \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + B \right\} = 0. \quad (1.11)$$

Компоненты Φ являются функциями пространственной координаты s_0 и времени t и определяются равенством

$$\Phi = [\gamma, \varepsilon_1, k_1, \varphi, x, y]^T. \quad (1.12)$$

Матрицы A и B размером 6×6 являются функциями компонент Φ , которые, в свою очередь, являются функциями времени t и координаты s_0 .

Статической задаче соответствуют уравнения (1.8), (1.9) и (1.10), но при равных нулю скоростях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = k_1 = k_2 = \gamma = 0$. Поэтому статической задаче соответствуют уравнения, стоящие в фигурных скобках:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + B = 0.$$

Ее решение получается асимптотически из системы (1.11) при стремлении $\gamma, \varepsilon_1, k_1$ и $\dot{\varphi}, \dot{x}, \dot{y}$ к нулю.

В общем случае опирания и нагружения на каждом из краев оболочки могут быть заданы три условия вида [5]:

$$s_0 = 0, \quad D^1 \dot{\Phi} + G^1 = 0; \quad s_0 = L, \quad D^2 \dot{\Phi} + G^2 = 0. \quad (1.13)$$

Матрицы $D^1 = [d_{lm}^1]$, $G^1 = [g_m^1]^T$, $D^2 = [d_{lm}^2]$, $G^2 = [g_m^2]^T$ ($l = 1, \dots, 6, m = 1, 2, 3$) являются функциями Φ и могут меняться во времени.

Краевая задача относится к задаче Гурса — Римана. Интегрирование ведется в характеристическом колодце, ограниченном снизу характеристикой $t = 0$, а по краям — характеристиками $s_0 = 0$ и $s_0 = L$. Предполагается, что при $t = 0$ функция $\Phi(s_0)$ задана.

Решение велось пошаговым методом, для каждого набора значений нагрузки p_φ и p_z итерационный процесс проводился до установления, когда скорость $|\partial \Phi / \partial t|$ становилась меньше наперед заданной величины, определяющей ошибку вычислений.

Скорости неизвестных могут быть приближенно заменены через отношение конечных приращений $\Delta \Phi_l = \Phi(t_l) - \Phi(t_{l-1})$ к приращению времени $\Delta t_l = t_l - t_{l-1}$, $l = 1, \dots, N_t$, $t_0 = 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=t_l} \approx \frac{\Delta \Phi_l}{\Delta t_l}, \quad (1.14)$$

где N_t — число шагов по времени до получения решения. Тогда система (1.11) может быть сведена к следующему виду:

$$\frac{d\Delta\Phi_l}{ds_0} + A|_{t=t_l} \Delta\Phi_l + \frac{\Delta t_l}{\tau} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial s_0} + B \right\} \Big|_{t=t_l} = 0. \quad (1.15)$$

Если при некотором $t = t_l$ известно распределение $\Phi(t_l, s_0)$ вдоль s_0 , то могут быть найдены $\partial\Phi/\partial s_0$, матрицы A и B как функции от s_0 . Величина $\Delta\Phi_l$ на рассматриваемом временном слое при каком-либо значении времени t_l является функцией только координаты s_0 . Тогда в системе (1.15) известны коэффициенты и по отношению к приращениям $\Delta\Phi_l$ система (1.15) будет системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [5, 6]. Найдя $\Delta\Phi_l$ можно найти значение функций для следующего значения времени t_{l+1} , а именно как сумму $\Phi_{l+1} = \Phi_l + \Delta\Phi_l$, и далее повторять процесс до установления решения. Производные по координате s_0 аппроксимировались конечно-разностной схемой второго порядка точности. На каждом временном слое двухточечная краевая задача решалась методом ортогональной прогонки Годунова [3]. По t использовалась схема первого порядка точности с переменным шагом. При этом для ряда точек для образующей необходимо хранить в памяти ЭВМ компоненты Φ с предыдущего шага по t . Более подробно весь процесс численного решения описан в [6].

Проблема выбора параметра вязкости τ не существует, так как может быть введено безразмерное время $T = t/\tau$, и решение будет функцией от T .

2. Деформация роговицы глаза

Рассмотрим деформацию роговицы глаза для различных значений ее толщины h , которая считается постоянной вдоль координаты s_0 . Будем считать, что ее форма соответствует сферической поверхности с радиусом $R = 8\text{mm}$ и углом полураствора $\varphi = 1,18\text{rad}$. Края жестко защемлены, модуль упругости роговицы $E = 2.0 \cdot 10^6 \text{Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.45$ [2]. Радиус области, где прикладывается давление, $r_p = 1.5\text{mm}$ (рис. 2).

На рис. 3 показано, как меняется прогиб в центре роговицы W в зависимости от приложенного давления для трех значений ее толщины h . Как видно, деформация имеет ярко выраженный нелинейный характер. Обычно прогиб W достигает 0,5–0,7 мм. На рис. 4 представлены формы прогиба роговицы для толщины $h = 4\text{mm}$. Каждой форме соответствует точка на соответствующей кривой на рис. 3. Чем больше давление, тем больше прогиб.

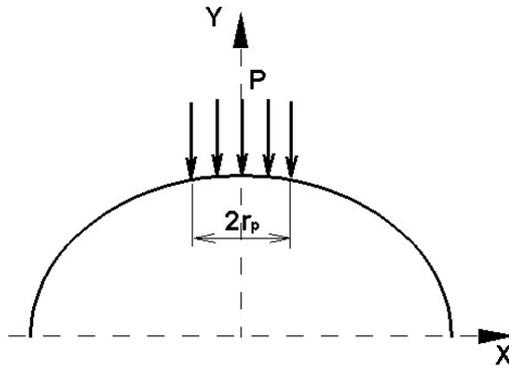


Рис. 2. Схема нагружения роговицы глаза

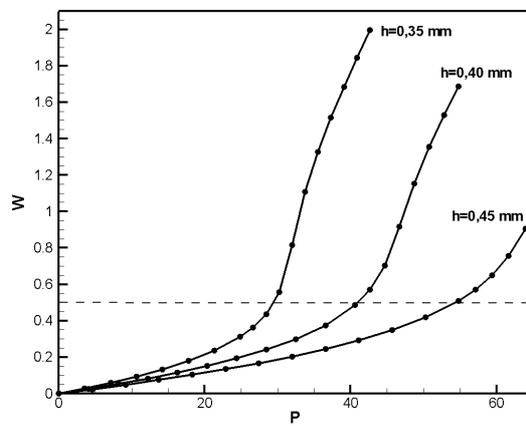


Рис. 3. Зависимость перемещения в центре роговицы W (mm) от давления P (мм рт. столба) для различных толщин роговицы h

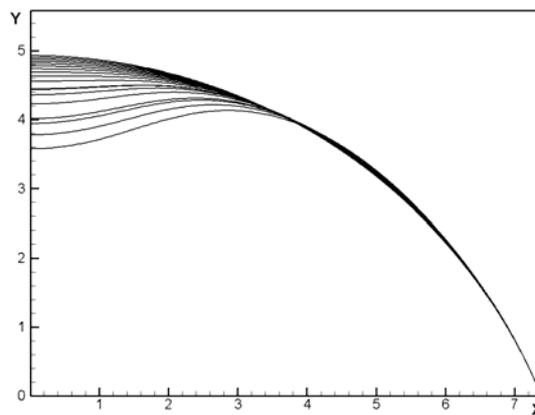


Рис. 4. Изменение формы роговицы (размеры даны в миллиметрах) для различных значений давления p для толщины $h = 4mm$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бауэр С. М. Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления // Тр. семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2006–2007 гг. / Под ред. А. Л. Смирнова, Е. Ф. Жигало. — СПб: Изд-во СПбГУ, 2007. — С. 3–19.
2. Бауэр С. М., Любимов Г. А., Тоевстик П. Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 2005. — № 1. — С. 24–39.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 3.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 2004.
5. Ширко И. В., Якушев В. Л. Физически и геометрически нелинейные деформации оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. — 1975. — № 6. — С. 103–109.
6. Якушев В. Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. — М.: Наука, 2004. — 276 с.

R. R. Khusainov

MATHEMATICAL MODELLING NONLINEAR CORNEA DISTORTIONS

The article is devoted to numerical solution of a nonlinear problem regarding cornea distortion under its loading under uniform pressure along a limited central area. Such kind of loading corresponds to several methods of measuring intraocular pressure. Cornea is presented as an axis-symmetrically distorted rotation shell with rigid attachment at the edges. To describe its tensely distorted state, they use a system of six nonlinear first-order ordinary differential equations. A solution with respect to loading is made by step-by-step method. Subject to investigation being influence of cornea thickness upon transfers of its surface.