Б. П. Рудаков

К ПРОБЛЕМАМ СПРЯМЛЯЕМОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕШЕСТИУГОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТКАНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ ТРЕМЯ ПУЧКАМИ И СВЯЗКОЙ ПЛОСКОСТЕЙ T_4

Изучен специальный класс пространственных нешестиугольных тканей, имеющих важное прикладное значение. Найдены условия и эффективные методы их спрямляемости, исследован вопрос единственности. Показано, что известная гипотеза В. Бляшке не находит подтверждения.

Один из виднейших геометров, руководитель Гамбургской математической школы В. Бляшке [1] совместно со своими многочисленными сотрудниками и последователями в 30-х гг. прошлого века заложили основы новой области математики — так называемой «геометрии тканей». В Советском Союзе это направление стало развиваться с 60-х гг. и с тех пор были получены серьезные результаты, прежде всего в трудах С. В. Смирнова [13, 14], П. В. Николаева [7, 8] и ряда их учеников. Однако многие поставленные В. Бляшке проблемы не решены, ими интересуются немало исследователей.

Рассматривается совокупность четырех семейств поверхностей

$$t_j(x,y,z)=t_j=\mathrm{const}\ \ (j=1\div 4), \tag{1}$$

определяющая ткань трехмерного пространства. Известно, что исключение x,y,z из (1) приводит к уравнению ткани. Возьмем его в виде

$$t_4=f(t_1,t_2,t_3). \tag{2}$$

Особый интерес [1] представляют условия и эффективные методы спрямляемости тканей, проблемы допустимых преобразований и канонические формы уравнений ткани (2), вопросы единственности.

Для определенности среди нешестиугольных тканей с уравнением (2) рассмотрим ткани, образованные семейством плоскостей t_4, принадлежащим связке, и тремя пучками плоскостей t_r $(r=1,2,3)$, таких, что семейства плоскостей t_1, t_2 принадлежат одной, а семейства плоскостей t_3, t_4 — другой связке. Такую ткань в дальнейшем будем обозначать T_4.

Двойственным образом такой ткани T_4 будет пространственная номограмма (назовем ее также T_4), состоящая из четырех плоских шкал, лежащих в двух плоскостях, причем шкала переменной t_4 — криволинейная. Для определенности будем считать, что шкалы переменных t_1,t_2 лежат в плоскости $y=0$, а шкалы переменных t_3,t_4 — в плоскости $z=0$. При этих условиях, как показал Соро [16], уравнение такой номограммы принимает вид

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(t_i), & 0, & f_{i2}(t_i), & 1 \\ f_{k1}(t_k), & f_{k2}(t_k), & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (i=1,2;\, k=3,4). \qquad (3)$$

Эта пространственная номограмма допускает плоский эквивалент — составную номограмму из двух подномограмм с общей прямолинейной немой шкалой α:

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(t_i), & f_{i2}(t_i), & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{k1}(t_k), & f_{k2}(t_k), & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3^*)$$

Заметим, что такие номограммы (составные номограммы из выравненных точек) нашли самое широкое применение в науке и технике [2, 3].

Подобными вопросами занималось немало исследователей, но многие проблемы так и остались нерешенными [1. § 40].

В дальнейшем будем считать, что однозначная функция $f(t_1, t_2, t_3)$ обладает в области G непрерывными частными производными достаточно высокого порядка и отличными от нуля производными $\dfrac{\partial f}{\partial t_j} \equiv f'_j \neq 0 \quad (j = 1 \div 3)$.

Отсюда следует, что вводимые всюду далее функции

$$M = -\frac{(t_4)'_2}{(t_4)'_1}, \; \overline{M} = -\frac{(t_4)'_3}{(t_4)'_1} \qquad (4)$$

будут достаточно гладкими и не обращающимися в нуль в точках области G. Относительно неизвестных функций f_{rj} уравнения (3) полагаем, что они обладают непрерывными производными необходимого порядка.

Каждой ткани T_4 приведем в соответствие граф (назовем его также T_4), состоящий из четырех прямых: оси α пересечения плоскостей $y = 0$, $z = 0$ (т. е. оси Ox) и трех прямых — носителей шкал переменных t_1, t_2, t_3. Проведя проективную классификацию тканей T_4 [10], видим, что оказалась справедливой

Теорема 1. *Существует <u>точно пять</u> проективно различных графов тканей* T_4 (рис.):

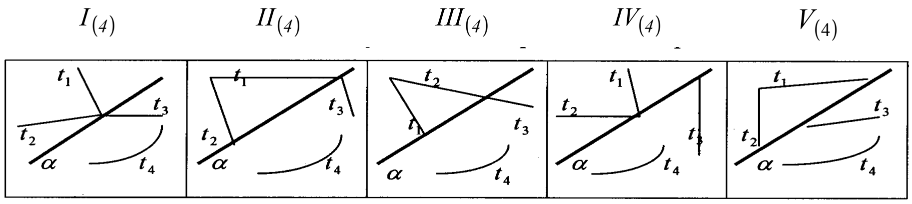

Рис. Проективно различные графы тканей T_4

соответственно с символами:

к форме $I_{(4)}$ приводит, по крайней мере, граф $[(t_1, t_2, t_3)]$;

к форме $II_{(4)}$ — графы $[(t_1, t_3), (t_2)], [(t_2, t_3), (t_1)]$;

к формам $III_{(4)}, IV_{(4)}$ — соответственно графы $[(t_1, t_2), (t_3)]$, $[(t_1), (t_2), (t_3)]$.

При этом два графа T_4 называем проективными, если существует коллинеация пространства, переводящая прямые одного графа в соответствующие прямые другого графа. Ясно, что из проективности двух тканей T_4 следует проективность их графов; обратное, вообще говоря, не имеет места.

Каждое из уравнений Соро (3) при условии, что элементы только его последней строки линейно независимы, может быть представлено в виде $\Psi(F_1, F_2, F_3, F_4, \Phi_4) = 0$, где $F_j \equiv F_j(t_j)$, $\Phi_4 \equiv \Phi_4(t_4)$, а Ψ — линейная функция относительно каждой из переменных F_j, Φ_4.

Уравнение $\Psi(F_1, F_2, F_3, F_4, \Phi_4) = 0$ назовем *канонической* формой уравнения (1).

Определение 1. *Две канонические формы* $\Psi(F_1, F_2, F_3, F_4, \Phi_4) = 0$ *и* $\overline{\Psi}(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{\Phi}_4) = 0$ *будем называть эквивалентными, если существует замена переменных* $\overline{F}_j = \varphi_j(F_j)$, $\overline{\Phi}_4 = \overline{\varphi}_4(\Phi_4)$, *переводящая одно из уравнений в другое.*

Теорема 2. *Существует* [5, 6, 10, 11] *<u>не более четырех</u> следующих канонических форм уравнений (2), спрямляемых тканью* T_4:

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_4 = F_1 + F_2, \qquad \text{(I)}$$

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_4 = F_1 \cdot F_2, \qquad \text{(II)}$$

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_4 = \frac{1}{F_1 + F_2}, \qquad \text{(III)}$$

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_4 = \frac{1}{F_1 \cdot F_2 + 1}. \qquad \text{(IV)}$$

Чтобы оттенить основные идеи методов исследований, поставленные выше вопросы рассмотрим для случаев тканей T_4 с графами $[(t_1, t_3), (t_2)]$, $[(t_2, t_3), (t_1)]$. Нетрудно показать [10], что их уравнения (3) приводятся к одной и той же канонической форме (II).

Поскольку в номограмме T_4 с уравнением (3) носителями шкал переменных t_1, t_2, t_3 являются прямые линии, то для удобства введем следующие обозначения элементов уравнения (3):

$$f_{rj}(t_r) \equiv f_r \; (r = 1 \div 3,\; j = 1,2). \qquad (5)$$

Для определенности рассмотрим ткань T_4 с графом $[(t_2, t_3), (t_1)]$. После надлежащего проективного преобразования можно считать, что в детерминантном уравнении Соро (3)

$$f_{12} = 1,\; f_{j1} = 0 \; (j = 2,3). \qquad (6)$$

Для уравнения (3) с условиями (6) справедлива [8] следующая теорема, дающая предварительные условия спрямляемости.

Теорема 3 (типа Гронвэлла). *Уравнение (2) тогда и только тогда представимо тканью T_4 с уравнением (3) с условиями (6), когда при заданных функциях M, $\overline{M}$ (4) существует решение относительно функций $f_r\left(r=1\div 3\right)$ (5) следующей системы дифференциальных уравнений*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f_1\left(f_2\right)_2^{/}}{\left(f_1\right)_1^{/} f_2\left(f_2-1\right)}=M\,,\ \frac{\left(f_1\right)_{11}^{//}}{\left(f_1\right)_1^{/}}-\frac{\left(f_1\right)_1^{/}}{f_1}+\left(\ln M\right)_1^{/}=0\,, \\ &\frac{\left(f_3\right)_{33}^{//}}{\left(f_3\right)_3^{/}}-2\frac{\left(f_3\right)_3^{/}}{f_3}+\frac{\left(f_1\right)_1^{/}}{f_1}\overline{M}+\overline{M}A-\left(\ln\overline{M}\right)_3^{/}=0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Следствие 1. *Элементы последней строки уравнения (3) определяются по формулам:*

$$f_{41}=\frac{f_1^2 f_2\left(f_3\right)_3^{/}}{\left(1-f_2\right)\left[\left(f_1\right)_1^{/} f_3\overline{M}-f_1\left(f_3\right)_3^{/}\right]},\ f_{42}=\frac{\left(f_1\right)_1^{/} f_3^2\overline{M}}{\left(f_1\right)_1^{/} f_3\overline{M}-f_1\left(f_3\right)_3^{/}}\,. \qquad (8)$$

Для удобства дальнейших исследований введем обозначения:

$$A=\left(\ln\frac{M}{\overline{M}}\right)_1^{/},\ S=\frac{\left[\overline{M}A-\left(\ln\overline{M}\right)_3^{/}\right]_1^{/}}{\overline{M}A}\,. \qquad (9)$$

Теорема 4. *Если уравнение (2) спрямляется тканью (3) с условиями (6), то функции M, $\overline{M}$ (4) удовлетворяют в области G условиям:*

$$M_3^{/}=0\,,\ \left(\ln M\right)_{12}^{//}=0\,,\ \left(\ln\overline{M}\right)_{13}^{//}\neq 0\,, \qquad (10)$$

$$\left(\ln MS\right)_1^{/}=0\,,\ S_3^{/}=0\,. \qquad (11)$$

Условие $M_3^{/}=0$ следует из первого уравнения (7). Остальные условия (10) получаются из следующих соображений.

На плоскостях любого семейства t_j ткани T_4 плоскости остальных трех семейств высекают прямолинейные ткани, кривизны которых в силу условия $M_3^{/}=0$ определяются по формулам:

$$k_1=\frac{\left(\ln\overline{M}\right)_{23}^{//}}{\left(f_1^{/}\right)^2\cdot M\cdot\overline{M}},\quad k_2=\frac{\left(\ln\overline{M}\right)_{13}^{//}}{\left(f_1^{/}\right)^2\cdot\overline{M}},\quad k_3=-\frac{\left(\ln M\right)_{12}^{//}}{\left(f_1^{/}\right)^2\cdot M},\quad k_4=-\sum_{i=1}^{3}k_i\,.$$

На плоскостях каждого из семейств t_3, t_4 плоскости других трех семейств высекают прямолинейные шестиугольные ткани [1]. Следовательно, $k_3=k_4=0$. Отсюда нетрудно [10. С. 171] получить и остальные из условий (10).

Условия (11) получаются из следующих исследований.

Система (7), очевидно, равносильна системе уравнений в частных производных:

$$(f_i)'_j = \text{д}_i^j \cdot y_i \,,\ (y_k)'_j = \delta_k^j \cdot z_k \ \ (i, j = 1 \div 3;\ k = 1{,}3), \tag{12}$$

где

$$z_1 = \frac{y_1^2}{f_1} - y_1(\ln M)'_1,\ y_2 = \frac{y_1}{f_1} f_2 (f_2 - 1) M\,,$$
$$z_3 = 2\frac{y_3^2}{f_3} - y_3\left[\frac{y_1}{f_1}\overline{M} + \overline{\mathrm{M}}\mathrm{A} - (\ln\overline{\mathrm{M}})'_3\right], \tag{13}$$

д_i^j, д_k^j — символы Кронекера.

Из условия интегрируемости $(z_3)'_1 = 0$ системы (12), подставив вместо производной z_1 ее значение из (13), получим [15] новое уравнение

$$y_1 = f_1 \cdot S\,, \tag{14}$$

налагающее условие на неизвестные функции системы (12). Дифференцировав это уравнение по t_1 и подставив вместо производных z_1, y_1 их выражения из (12), (14), получим условие (11): $(\ln MS)'_1 = 0$. Второе из условий (11): $S'_3 = 0$ — получается дифференцированием уравнения (14) по t_3.

Заметим, что условие $(\ln MS)'_1 = 0$ предполагает, что в области G функция $S \neq 0$. В противном случае из (14) имели бы, что $y_1 \equiv (f_1)'_1 = 0$. Это приводит к несуществованию функции $M = -\dfrac{(t_4)'_2}{(t_4)'_1}$, что видно из (12). Последнее противоречит условиям, наложенным на функцию $f(t_1, t_2, t_3)$.

Теорема 5. *Условия (10–11) являются не только необходимыми, но и достаточными для спрямляемости ткани с уравнением (2) тканью T_4 с графом $[(t_2, t_3), (t_1)]$. При этом уравнение (2) допускает, с точностью до коллинеаций, единственную ткань с указанным графом, и элементы этих тканей находятся с помощью лишь квадратур.*

Проективные преобразования пространства ткани T_4, автоморфные относительно плоскостей $y = 0,\ z = 0$ и прямых $\left.\begin{matrix} y = 0, \\ z = 1 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x = 0, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} x = 0, \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ — носителей осей связок плоскостей (3) с условиями (6), имеют вид:

$$\overline{x} = \frac{a_{11}x}{a_{42}y + (a_{33} - 1)z + 1},\ \overline{y} = \frac{a_{22}y}{a_{42}y + (a_{33} - 1)z + 1},\ \overline{z} = \frac{a_{33}z}{a_{42}y + (a_{33} - 1)z + 1}\,. \tag{17}$$

Это дает возможность присоединить к системе (7) с неизвестными $f_i\left(i=1\div 3\right)$ начальные условия. Возьмем их в виде:

$$\text{при}\, t_i=t_{i1}:\ f_k=1, f_2=-1,\ \left(f_3\right)_3^{/}=1\ \left(i=1\div 3; k=1{,}3\right), \tag{18}$$

где $t_i=t_{i1}$ — любая точка области G.

С помощью уравнения (14) от системы (12) можно перейти к системе, не содержащей в правых частях [15] функции y_1; получим:

$$\left(f_i\right)_j^{/}=д_i^j\cdot y_i\,,\ \left(y_3\right)_j^{/}=д_3^j\cdot z_3\ \ \left(i,j=1\div 3\right), \tag{19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} y_1=f_1\cdot S\,, y_2=f_2\left(f_2-1\right)M\cdot S\,,\\ z_3=2\frac{y_3^2}{f_3}-y_3\left[\overline{M}\left(A+\mathrm{S}\right)-\left(\ln\overline{\mathrm{M}}\right)_3^{/}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Из метода получения системы (19) ясно, что решения исходной системы (7) (в случае их существования) являются и решениями системы (19). Обратно, подставив в (7) вместо производных $\left(f_i\right)_i^{/}$, $\left(f_j\right)_{jj}^{//}$ $\left(i=1,2; j=1,3\right)$ их значения из системы (19), получим, что в силу условий теоремы [8] левые части уравнений (7) тождественно равны правым частям. Следовательно, система (19) эквивалентна исходной системе (7).

Можно было бы показать, что при условиях (10–11) система уравнений (19) является вполне интегрируемой. Отсюда следует полная интегрируемость системы Пфаффа [9] соответствующей системе (19). Вполне интегрируемая система Пфаффа при заданных начальных условиях имеет решение, и оно единственно [9]. Следовательно, имеет решение и исходная система (7). В силу теоремы 3 (типа Гронвэлла) заключаем, что условия (10–11) являются не только необходимыми, но и достаточными для представления уравнения $t_4=f\left(t_1,t_2,t_3\right)$ номограммой T_4 с графом $\left[\left(t_2,t_3\right),\left(t_1\right)\right]$.

При начальных условиях (18) из системы (19) определяются (однозначно и с помощью лишь квадратур) функции $f_i\left(i=1\div 3\right)$:

$$f_1=\ell^{\int_{t_{t11}}^{t_{t1}} S\cdot d\,t_1}\,,\ f_2=\frac{1}{1-2\ell^{\int_{t21}^{t_2} M\cdot S\cdot dt_2}}\,,\ f_3=\frac{1}{1-\int_{t_{31}}^{t_3}\ell^{-\int_{t31}^{t_3}\left[\overline{M}\left(A+S\right)-\left(\ln\overline{M}\right)_3^{/}\right]dt_3}}\,. \tag{21}$$

Элементы f_{41}, f_{42} последней строки определителя (3) найдутся из уравнений (8).

Из однозначности решений системы (11) следует, что номограммы T_4 с графом $\left[\left(t_2,t_3\right),\left(t_1\right)\right]$ уравнения $t_4=f\left(t_1,t_2,t_3\right)$ проективны.

Рассмотрим теперь номограмму T_4 с графом $\left[\left(t_1,t_3\right),\left(t_2\right)\right]$. Без нарушения общности можно положить в уравнении (3):

$$f_{j1}=0\,,\ f_{22}=1\ \left(j=1{,}3\right). \tag{22}$$

Как и в предыдущем случае, использовав теорему типа Гронвэлла для данного случая, придем к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{f_1(f_1-1)(f_2)_2^{/}}{(f_1)_1^{/} f_2} = M\,,\ \frac{(f_1)_{11}^{//}}{(f_1)_1^{/}} - \frac{(2f_1-1)(f_1)_1^{/}}{f_1(f_1-1)} + (\ln M)_1^{/} = 0\,, \\ &\frac{(f_3)_{33}^{//}}{(f_3)_3^{/}} - 2\frac{(f_3)_3^{/}}{f_3} + \frac{(f_1)_1^{/}}{f_1(f_1-1)}\overline{M} + \overline{M}A - (\ln\overline{M})_3^{/} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Нетрудно доказать, что и в данном случае остаются справедливыми выводы теоремы 4:

Теорема 6. *Если уравнение (2) спрямляется тканью (3) с условиями (22), то функции* M , $\overline{M}$ *(4) удовлетворяют в области* G *условиям:*

$$M_3^{/} = 0\,,\ (\ln M)_{12}^{//} = 0\,,\ (\ln\overline{M})_{13}^{//} \neq 0\,, \tag{10}$$

$$(\ln MS)_1^{/} = 0\,,\ S_3^{/} = 0\,. \tag{11}$$

Аналогично предыдущему случаю систему (23) при условиях (10–11) можно привести к вполне интегрируемой системе

$$(f_i)_j^{/} = \delta_i^j \cdot y_i\,,\ (y_3)_j^{/} = \delta_3^j \cdot z_3\ \ (i,j = 1 \div 3), \tag{24}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = -f_1(f_1-1)\cdot S\,, y_2 = -f_2\cdot M\cdot S\,, \\ &z_3 = 2\frac{y_3^2}{f_3} - y_3\left[\overline{M}(A+\mathrm{S}) - (\ln\overline{\mathrm{M}})_3^{/}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Проективные преобразования пространства номограммы (3) с условиями (22) имеют вид:

$$\overline{x} = \frac{a_{11}x}{a_{42}y + (a_{33}-1)z + 1}\,,\ \overline{y} = \frac{a_{22}y}{a_{42}y + (a_{33}-1)z + 1}\,,\ \overline{z} = \frac{a_{33}z}{a_{42}y + (a_{33}-1)z + 1}\,. \tag{26}$$

Это позволяет присоединить к системе (23) начальные условия; возьмем их в виде:

$$\text{при } t_i = t_{i1} : f_1 = -1,\ f_k = 1,\ (f_3)_3^{/} = 1\ (i = 1 \div 3; k = 2{,}3)\,, \tag{27}$$

где t_{i1} — любое значение переменных t_i. При этих начальных условиях из уравнений (24) однозначно и с помощью лишь квадратур найдутся функции f_i (в отличие от решений (21) обозначим их $f_i^{(2)}$):

$$f_1^{(2)} = \frac{1}{1 - 2\ell^{-\int_{t_{11}}^{t_1} S\cdot dt_1}}\,,\ f_2^{(2)} = \ell^{-\int_{t_{21}}^{t_{21}} M\cdot S\cdot dt_2}\,,\ f_3 = \frac{1}{1 - \int_{t_{31}}^{t_3} \ell^{-\int_{t_{31}}^{t_3}\left[\overline{M}(A+S) - (\ln\overline{M})_3^{/}\right]dt_3}}\,. \tag{28}$$

Следовательно, все номограммы T_4 с графом $[(t_1,t_3),(t_2)]$ уравнения $t_4 = f(t_1,t_2,t_3)$ проективны.

Заметим, что рассмотренные номограммы T_4 с уравнением (3) при условиях (6) и (22), соответственно с графами $[(t_2,t_3),(t_1)]$, $[(t_1,t_3),(t_2)]$, не проективны (теорема 1). Однако по элементам одной из этих номограмм можно указать элементы другой. Действительно, сравнивая решения (21) с решениями (28), получаем:

$$f_1^{(2)} = \frac{f_1}{f_1 - 2}, \; f_2^{(2)} = \frac{2f_2}{f_2 - 1}, \; f_3^{(2)} = f_3. \tag{29}$$

При этом отметим, что подобные преобразования не входят в совокупность проективных преобразований (17) или (26), что еще раз подчеркивают непроективность тканей с рассмотренными графами тканей. Наконец, заметим, что

$$f_{4j}^{(2)} = f_{4j} \; (j = 1,2).$$

<u>Замечание о гипотезе В. Бляшке</u>

Выше указывалось, что уравнение (2) $t_4 = f(t_1,t_2,t_3)$ можно рассматривать как уравнение пространственной ткани [1], полученное исключением x, y, z из уравнений совокупности четырех семейств поверхностей

$$t_j(x,y,z) = t_j = \mathrm{const} \; (j = 1 \div 4). \tag{1}$$

Для номографии представляет особый интерес [1] случай, когда ткань (1) с известным уравнением (2) является спрямляемой, т. е. когда существует топологическое преобразование пространства, переводящее каждое из семейств поверхностей (1) в семейство плоскостей. В этом случае коррелятивное преобразование пространства преобразует ткань из плоскостей в пространственную номограмму из выравненных точек [1].

Для пространственной ткани В. Бляшке [1. С. 111] формулирует следующую «гипотезу, аналогичную гипотезе Гронвэлла [4]:

Образованная поверхностями ткань, не являющаяся шестиугольной, допускает (с точностью до коллинеаций) не больше одной реализации в виде ткани из плоскостей».

В статье указывалось, что коррелятивным образом номограммы T_4 является нешестиугольная пространственная ткань. При исследовании канонической формы (II) оказалось, что одно и то же уравнение (2) при условиях (9–10) допускает две номограммы T_4 с непроективными графами $[(t_2,t_3),(t_1)]$, $[(t_1,t_3),(t_2)]$. Тем самым гипотеза В. Бляшке не получает подтверждения.

Основные выводы:

1. Найдены условия спрямляемости рассматриваемых тканей.
2. Указаны эффективные методы решения проблемы с помощью лишь квадратур.
3. Определен вид канонического уравнения рассмотренных тканей.
4. Найдены топологические преобразования пространства тканей.

5. Решен вопрос о единственности. Гипотеза В. Бляшке оказалась несостоятельной.

6. Найдены преобразования детерминантных уравнений рассмотренных тканей, переводящие одну из них в другую, с ней непроективную.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бляшке В.* Введение в геометрию тканей. — М., 1959.
2. *Дураков (Рудаков) Б. П.* О представлении уравнений с четырьмя переменными составными номограммами первого жанра с прямолинейной ответной шкалой // Материалы I Межвуз. конф. СССР. — М., 1965. — С. 24–25.
3. *Дураков (Рудаков) Б. П.* Составные номограммы первого жанра с четырьмя переменными // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та. — 1965. — Вып. 31. — С. 50–72.
4. *Дураков (Рудаков) Б. П.* К вопросу единственности спрямляемости некоторых пространственных нешестиугольных тканей // Тр. Тюм. индустр. ин-та «Бурение скважин и трубопроводный транспорт нефти и газа». — Тюмень, 1969. — С. 264–280.
5. *Дураков (Рудаков) Б. П.* О приведении уравнений с четырьмя переменными к каноническим формам пятого номографического порядка // Номогр. сб. № 6. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1969. — С. 190–199.
6. *Дураков Б. П.* К вопросу о приведении уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам // Номогр. сб. № 10. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1975. — С. 178–185.
7. *Николаев П. В.* О представлении уравнений номограммами второго жанра // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 6.
8. *Николаев П. В.* О номограммах второго жанра с ответной криволинейной шкалой // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та. Сер. Математика. — Сб. 79. — 1969. — С. 56–65.
9. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. — М.: ВЦ АН СССР, 1964.
10. *Рудаков Б. П.* Условия и методы спрямляемости некоторых пространственных тканей, номографирования уравнений и приведения их к каноническим формам. — Тюмень: Вектор Бук, 2003. — 246 с.
11. *Рудаков Б. П.* О приведении уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам, допускающим представление составными шкальными номограммами первого жанра // Вестн. Тюм. ун-та. — 2005. — № 4. — С. 112–121.
12. *Рудаков Б. П.* О предварительных условиях спрямляемости некоторых пространственных тканей // Вестн. Тюм. ун-та. — 2006. — № 5. — С. 250–258.
13. *Смирнов С. В.* Многомерные номограммы и ткани // Успехи мат. наук. — 18, № 3. — М., 1963. — С. 238–240.
14. *Смирнов С. В.* Номограммы и ткани // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 149, № 1. — С. 36–39.
15. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М., 1947.
16. *Soreau R.* Nomographie ou Traité des Abaques. — P., 1921. — T. 1. — P. 345.

B. P. Rudakov

ON RECTIFIABILITY AND UNIQUENESS OF CERTAIN NON-HEXAGONAL SPATIAL GRIDS FORMED BY THREE CLUSTERS AND T_4 PLANAR BOND

Subject to investigation being a special class of spatial non-hexagonal grids to be of considerable practical importance. The author managed finding conditions and efficient methods of their rectifiability, together with studying a question of uniqueness. It is shown that a famous hypothesis by V. Blyashke proves to find no confirmation.