И. А. Владельщикова, Е. В. Власов, Т. А. Шмелева

АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ АВАРИЙНЫХ СБРОСОВ НЕФТЕЗАГРЯЗНЕНИЙ В ВОДОТОК

Исследуется точность алгоритма оценивания графика залпового сброса нефтяного загрязнителя в водоток по контролю динамики загрязненности водной среды в выходном контрольном створе.

Модель

Разработка алгоритма оценки объемов (графика) аварийных сбросов по данным концентрации углеводородов во входном и выходном створах водотока требует построения адекватной математической модели миграции нефтяных загрязнений (НЗ) воды [2, 4]. Анализ кратковременных аварийных событий предопределяет специфику упрощенного описания процессов, учитывающих главные механизмы массообмена в квазистационарных гидрохимических условиях.

Основываясь на камерной схеме деления анализируемого участка реки (рис. 1) [1, 5], будем выделять только две переменные состояния для каждой камеры: $M_i(t)$ — соответствует массе НЗ в водной среде; $MV_i(t)$ — масса «подвижного» НЗ, адсорбированная вторичными кумулятивными зонами (берег, дно, растительность и т. п).

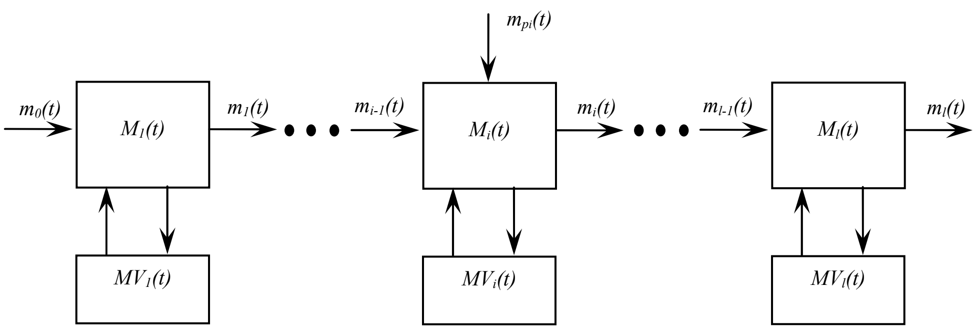


Рис. 1. Структурная схема камерной гидрохимической модели водоема

Главные механизмы массообмена включают:

— био- и фотохимическую деструкцию с параметрами кинетики б_i, $\text{б}V_i$;

— массообмены между водным раствором и кумулятивными зонами с параметрами сорбции — в_i и вторичного загрязнения — $\text{в}V_i$;

— диффузионный массообмен между водными растворами камер с параметром $\aleph_i$;

— переход адсорбированного НЗ из «подвижного» состояния в условно «неподвижное», связанное с почвогрунтами, скорость отвердения пропорциональна параметру б_G;

— массоперенос с потоком воды русла реки.

В свете изложенного линеаризованная, стационарная на коротком интервале времени динамика массообмена i-й камеры в условиях «неподвижной воды» может быть описана системой уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{M}_i(t) = -(б_i + в_i)M_i(t) + вV_i MV_i(t) + \aleph_i (M_{i-1}(t) - 2\cdot M_i(t) + M_{i+1}(t)) + \\ \quad + m_{p_i}(t), \\ \dot{MV}_i(t) = -(бV_i + вV_i + б_G)MV_i(t) + в_i M_i(t), \end{cases} \qquad (1)$$

где $m_{p_i}(t)$ — кратковременный аварийный сброс. Учет адвективной компоненты массопереноса нагляднее вводить в дискретном времени. Пусть ф сравнительно малый период дискретизации:

$$ф < ф_i = \min \left\{ \Delta t_i,\ 0.1\cdot\left(б_i + в_i + 2\cdot\aleph_i\right)^{-1},\ 0.1\cdot\left(бV_i + вV_i + б_G\right)^{-1} \right\}.$$

Здесь $\Delta t_i = l_i / \vartheta_i$ — время полного замещения воды в i-й камере, l_i — длина камеры, ϑ_i — средняя скорость тока. На основании (1) искомая дискретная модель первого приближения [3] запишется следующим образом:

$$\begin{cases} M_i(k+1) = (1 - л_i - ф\,(б_i + в_i + 2\cdot\aleph_i))\cdot M_i(k) + ф\, вV_i \cdot MV_i(k) + \\ \quad + (л_{i-1} + ф\,\aleph_i)\cdot M_{i-1}(k) + ф\,\aleph\cdot M_{i+1}(k) + mP_i(k), \\ MV_i(k+1) = (1 - ф\,(бV_i + вV_i + б_G))\cdot MV_i(k) + ф\, в_i \cdot M_i(k), \end{cases} \qquad (2)$$

где $M_i(k) = M_i(t_k)$, $t_{k+1} = t_k + ф$, $mP_i(k) = ф\, m_{p_i}(k)$ — количество НЗ, поступивших в i-ю камеру с поверхностным стоком за период времени $[t_k,\ t_{k+1})$. Механика адвективного переноса учитывается равенством

$$\begin{aligned} M_i(k+1) &= \lambda_{i-1}\cdot M_{i-1}(k) + (1-\lambda_i)\cdot M_i(k) + \Delta M_i(k) = \\ &= M_i(k) + m_{i-1}(k) - m_i(k) + \Delta M_i(k). \end{aligned}$$

Параметр $л_i = ф / \Delta t_i$ определяет долю замещения загрязненных вод i-й камеры на $л_{i-1}$ долю воды из $i-1$ камеры. Перейдем к укороченным обозначениям параметров системы (2)

$$a_i = 1 - л_i - ф\,(б_i + в_i + 2\cdot\aleph_i),\ aV_i = 1 - ф\,(бV_i + вV_i + б_G),\ b_i = ф\, вV_i,$$

$$bV_i = ф\, в_i,\ х_{i-1} = л_{i-1} + ф\,\aleph_i,\ ч_i = ф\,\aleph_i$$

и запишем (2) в виде одного уравнения второго порядка относительно $M_i(k)$:

$$M_i(k) = \varphi_i(z)^{-1}\cdot\left(\upsilon_{i-1}M_{i-1}(k) + \chi_i M_{i+1}(k) + mP_i(k)\right), \qquad (3)$$

где

$$\varphi_i(z)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z - a_i & -b_i \\ -bV_i & z - aV_i \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{z - aV_i}{z^2 - (a_i + aV_i)\cdot z + a_i\cdot aV_i - b_i\cdot bV_i},$$

а z^i — дискретный оператор *i*-шагового опережения/запаздывания ($z^i x(k) = x(k+1)$, $i \in \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$).

Алгоритм

Воспользуемся представлением модели камеры в виде (3) и рассмотрим задачу оценки графика $mP_i(k)$ по измерениям пары $< M_l(k),$ $M_0(k),\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots >$ для структуры водотока на рис. 1. Приняв для простоты анализа $ч_l = 0$, запишем модель анализируемого участка в виде

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cc} \varphi_1(z) & -\chi_1 & 0 & \vdots & & \\ -\upsilon_1 & \varphi_2(z) & -\chi_2 & & \bigcirc & \\ 0 & -\upsilon_2 & \varphi_3(z) & & & \\ \hline & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ & & & \vdots & \varphi_{\,-1}(z) & -\chi_{l-1} \\ & \bigcirc & & & -\upsilon_{l-1} & \varphi\,(z) \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} M_1(k) \\ M_2(k) \\ M_3(k) \\ \cdots \\ M_{l-1}(k) \\ M_l(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \upsilon_0 M_0(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} mP_i(k). \tag{4}$$

Перейдя к векторно-матричной форме, получаем более компактную запись

$$\Phi(z) \cdot M(k) = \mathbf{1}_1 \upsilon_0 M_0(k) + \mathbf{1}_i\, mP_i(k), \tag{5}$$

где $M(k) = col[M_1(k)\ \ldots\ M_l(k)]$, $\mathbf{1}_j = col[0\ \ldots\ \overbrace{0\ 1}^{j}\ 0\ \ldots\ 0]$. Разрешив (4), (5) относительно измеряемого выхода $M_l(k)$, получаем

$$\det\ \Phi(z) \cdot M_l(k) = \upsilon_0 \cdot \Phi_{1l}(z) \cdot M_0(k) + \Phi_{il}(z) \cdot mP_i(k), \tag{6}$$

что подтверждается выводом

$$M_l(k) = \mathbf{1}_l^T M(k) = \mathbf{1}_l^T \Phi(z)^{-1} (\mathbf{1}_1 \upsilon_0 M_0(k) + \mathbf{1}_i mP_i(k)) =$$
$$= \frac{1}{\det\ \Phi(z)} \left(\upsilon_0 \Phi_{1l}(k) M_0(k) + \Phi_{il}(k) mP_i(k) \right),$$

где $\Phi(z)^{-1} = \dfrac{1}{\det\ \Phi(z)} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{11}(z) & \ldots & \Phi_{1l}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_{l1}(z) & \ldots & \Phi_{ll}(z) \end{bmatrix}$, $\Phi_{ij}(z)$ — алгебраическое дополнение *i, j* элемента матрицы $\Phi(z)$.

Отсюда

$$\mathbf{1}_l^T \cdot \Phi(z) \cdot \mathbf{1}_j = [\Phi_{1l}(z)\ \ldots\ \Phi_{ll}(z)] \cdot \mathbf{1}_j = \Phi_{jl}(z),\ j = \{0,\ i\}.$$

<u>Утверждение 1.</u> В условиях (4), (5) для уравнения (6) справедливо представление

$$\frac{a^l(2l, z)}{b^l(l, z)} M_l(k) = \upsilon_\Sigma M_0(k) + \frac{a^i(2i-2, z)}{b^i(i-1, z)} mP_i(k), \tag{7}$$

$$b^l(l,z) = b^i(i-1,z)\cdot b_1^l(l-i+1,z)\ ,$$

где $a^{\bullet}(j,z)$ и $b^{\bullet}(m,z)$ — дискретные операторы вида

$$a^{\bullet}(j,z) = z^j + a_{j-1}^{\bullet}z^{j-1} + \ldots + a_0^{\bullet},\ b^{\bullet}(m,z) = b_m^{\bullet}z^m + b_{m-1}^{\bullet}z^{m-1} + \ldots + b_0^{\bullet}.$$

На основании (7) результат формулируется следующим образом.

<u>Утверждение 2.</u> Для структуры водотока на рис. 1 в условиях (2), (3) оценка графика скрытых сбросов $\hat{m}P_i(k)$ по измерениям $M_0(k)$, $M_l(k)$, $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ восстанавливается на решениях порождающего решения

$$b_1^l(l-z+1,z)\cdot a^i(2i-2,z)\cdot \hat{m}P_i(k) = \text{у}_l(k)\,, \qquad (8)$$

где $\text{у}_l(k)$ вычисляется по выражению

$$\sigma_l(k) = a^l(2l,z)\cdot M_l(k) - \upsilon_{\Sigma}\cdot b^l(l,z)\cdot M_0(k)\,.$$

Доказательство результата (8) сразу следует из (7) после приведения последнего к общему знаменателю.

<u>Пример</u>

Рассматривается модель водотока с тремя однотипными камерами. Исходные параметры модели приведены в табл.

Исходные параметры и состояния модели

1	Скорость течения, ϑ, м/час	360
2	Длина камеры, l, м	360
3	Время полного замещения, Δt, час	1
4	Скорость биохимической деструкции, б, час$^{-1}$	0,01
5	Скорость сорбции, в, час$^{-1}$	0,08
6	Скорость диффузии, d, час$^{-1}$	0,04
7	Состояние загрязненности на входе, $M_0(t)$, кг	0
8	Шаг дискретизации, ф, час	0,01
9	Начальные условия, $M_i(0)$, кг	0
10	Глубина камеры, м	2
11	Ширина камеры, м	36

Для дискретного представления модели (2) без вторичных кумулятивных зон ($\beta V_i \equiv 0$)

$$M_i(k+1) = \text{б}\cdot M_i(k) + \text{х}\cdot M_{i-1}(k) + \text{ч}\cdot M_{i+1} + mP_i(k),\quad i=\{1,2,3\},$$

параметры рассчитываются по следующим уточненным выражениям:

$$\text{б} = 1 - \text{л} - \text{ф}\cdot(\text{б} + \text{в} + d\cdot \text{б}_{i.i}) = 0{,}9691,$$

$$\text{х} = \text{л} + \text{ф}\cdot \text{б}_{i-1,\,i}\cdot d = 0{,}03\ ,\ \ \text{ч} = \text{ф}\cdot \text{б}_{i,\,i+1}\cdot d = 2{,}78\cdot 10^{-8}\ ,$$

где $\alpha_{i,\,i} = \dfrac{\omega_{i-1,\,i}}{l_{i-1,\,i} \cdot V_i} + \dfrac{\omega_{i,\,i+1}}{l_{i,\,i+1} \cdot V_i} = 1{,}54 \cdot 10^{-5}$;

$$б_{i-1,\,i} = б_{i,\,i+1} = \frac{щ}{l. \cdot V.} = 7{,}72 \cdot 10^{-6};$$

$$\lambda = \frac{\vartheta \cdot \tau}{l.} = 0{,}01;$$

$w., l., V.$ — площадь створа, длина и объем воды в камере. Залповый сброс осуществлялся во вторую камеру: $mP_2(k) > 0$, $(mP_1(k) = mP_3(k) = 0)$ при нулевом фоне $M_0(k) = 0$. На рис. 2 приведены графики функции сброса $mP_2(k)$ — 1 и реакции водной системы $M_2(k)$ — 2, $M_3(k)$ — 3 для второй и третьей камер.

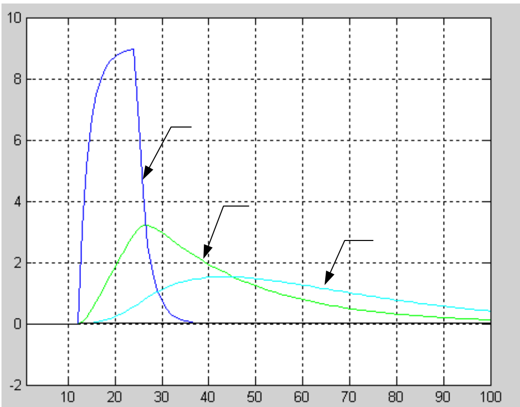
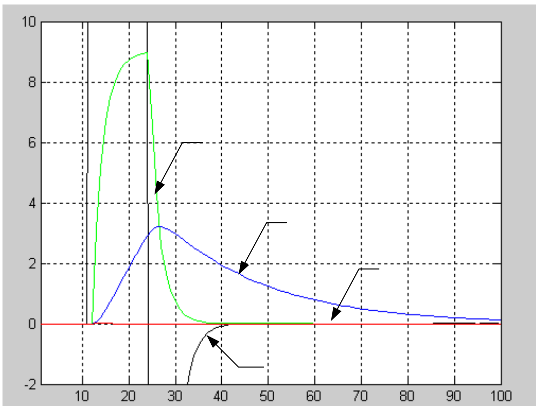


Рис. 2. Графики сброса $mP_2(k)$ — 1 и реакции системы $M_2(k)$ — 2, $M_3(k)$ — 3



кг

Рис. 3. Графики расчетных оценок сбросов для первой $\tilde{m}P_1(k)$ — 1, второй $\tilde{m}P_2(k)$ — 2 и третьей $\tilde{m}P_3(k)$ — 3 камер

1

2

В принятых предположениях дробно-рациональная функция $\varphi(z)$ модели (3) вырождается в линейную форму первого порядка

$$\varphi(z) = z - 0{,}9691\,.$$

Модель анализируемого участка согласно (4) запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \varphi(z) & -2{,}78\cdot 10^{-8} & 0 \\ -0{,}03 & \varphi(z) & -2{,}78\cdot 10^{-8} \\ 0 & -0{,}03 & \varphi(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1(k) \\ M_2(k) \\ M_3(k) \end{bmatrix} = 0{,}03 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M_0(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + mP_2(k).$$

Отсюда уравнение (6), связывающее входо-выходные переменные, приобретает вид

$$\varphi(z)\cdot(\varphi^2(z) - 8{,}34\cdot 10^{-10})\cdot M_3(k) = 2{,}7\cdot 10^{-5}\cdot M_0(k) + 0{,}03\cdot\varphi(z)\cdot mP_2(k)\,,$$

а искомое порождающее уравнение (8) может быть представлено соотношениями

$$(z - 0{,}9691)\cdot \widetilde{mP}_2(k) = 33{,}33\cdot\sigma_3(k),$$

где

$$\sigma_3(k) = (z^2 - 1{,}9382\cdot \mathrm{z} + 0{,}9392)\cdot \mathrm{M}_3(k) - 2{,}7\cdot 10^{-5}\cdot M_0(k)\,.$$

Отметим, что решение обратной задачи помимо восстановления графика функции сброса предполагает оценку и позиции источника. Поэтому подобные уравнения были получены в предположениях о сбросах в первую и третью камеры. Результаты решения обратной задачи при нулевом фоне $M_0(k) \equiv 0$ приведены на рис. 3. Анализ графиков и функции ошибки $e_2(k) = mP_2(k) - \widetilde{mP}_2(k) \approx 0$ (кривая 4) свидетельствует о состоятельности получаемой оценки при совпадении расчетной позиции сброса — кривая $\widetilde{mP}_2(k)$ — 2 с фактической — 1 на рис. 2. Расчетная функция сброса в третью камеру $\widetilde{mP}_3(k)$ — 3 оказывается более сглаженной, в то время как предположение о сбросе в первую камеру $\widetilde{mP}_1(k)$ (при реальном сбросе во вторую $mP_2(k) > 0$) приводит к физически несостоятельным ($\widetilde{mP}_1(k) < 0,\ \widetilde{mP}_1(k) > 0$) результатам, кривая 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кюнж Ж. А., Холи Ф. М., Вервей А.* Численные методы в задачах речной гидравлики: практическое применение. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 256 с.

2. *Пикинеров П. В., Шмелева Т. А.* Моделирование нефтезагрязненности водотоков, расположенных на территории нефтяных месторождений // Вестн. кибернетики. — 2006. — № 5. — С. 10–15.

3. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1982. — 272 с.

4. *Шмелева Т. А., Вахов Д. Н.* Геоинформационные технологии контроля за состоянием загрязненности участков нефтяных месторождений // Криосфера Земли. — 1998. — Т. 2, № 3. — С. 36–43.

5. *Euren K., Weyer E.* System identification of open water channels with undershot and overshot gates // Control Engineering Practice. — 2007. — No. 15. — P. 813–824.

I. A. Vladel'tchikova, Ye. V. Vlasov, T. A. Shmeleva

ALGORITHM OF EVALUATING DISCHARGE OF OIL POLLUTANTS INTO A WATERWAY

The article investigates accuracy of an algorithm evaluating a schedule of unit discharge of oil pollutants into a waterway through monitoring dynamics of aquatic contamination in the outer monitoring section.