Б. П. Рудаков

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ СОСТАВНЫХ НОМОГРАММ ТРЕТЬЕГО ЖАНРА

Рассматриваются составные шкальные номограммы из выравненных точек третьего жанра специального вида для уравнений с четырьмя переменными. В терминах геометрии тканей изучены специальные классы нешестиугольных тканей, указаны условия их спрямляемости, определены соответствующие им канонические формы, образующие полную и несовместную группу.

Пусть совокупность четырех семейств поверхностей

$$t_j(x,y,z)=t_j=const.,(j=1-4) \tag{1}$$

определяет ткань трехмерного пространства [1]. Исключение *x*, *y*, *z* из (1) приводит к уравнению ткани; возьмем его в виде

$$t_4=f(t_1,t_2,t_3). \tag{2}$$

Представляют интерес те случаи, когда ткань (1) с известным уравнением (2) является спрямляемой, т. е. когда существуют топологические преобразования пространства, переводящие каждое из семейств поверхностей (1) в семейство плоскостей. Как известно [1], в этих случаях коррелятивное преобразование пространства преобразует ткань из плоскостей в номограмму из выравненных точек, определяемую уравнением

$$\left|f_{i1}(t_i);\ f_{i2}(t_i);\ f_{i3}(t_i);\ 1\right|=0 \quad (i=1-4). \tag{3}$$

В работе рассматривается случай, когда коррелятивный образ спрямленной пространственной ткани дает номограмму из четырех плоских шкал, лежащих попарно в двух плоскостях. Для определенности считаем, что шкалы t_1, t_2 принадлежат координатной плоскости $y=0$, а шкалы t_3, t_4 — плоскости $z=0$, чего, очевидно, можно достигнуть надлежащим проективным преобразованием пространства. При этих условиях, как показал R. Soreau [2], детерминантное уравнение номограммы имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(t_i), & 0, & f_{i2}(t_i), & 1 \\ f_{k1}(t_k), & f_{k2}(t_k), & 0, & 1 \end{vmatrix}=0\ (i=1,2;\ k=3,4), \tag{4}$$

и пространственная номограмма с этим уравнением допускает плоский эквивалент — составную номограмму из двух подномограмм с общей прямолинейной немой шкалой α:

$$\begin{vmatrix} f_{i1}, f_{i2}, 1 \\ \alpha \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} f_{k1}, f_{k2}, 1 \\ \alpha \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix}=0, \tag{4*}$$

где f_{jr} — сокращенное обозначение функции $f_{jr}(t_j)$ ($j=1-4;\ r=1,2$).

Что касается теоретико-функциональных условий, то в проводимых исследованиях считаем, что однозначная функция $f(t_1, t_2, t_3)$ уравнения (2), определенного в некоторой прямоугольной области G:

$$\alpha_i < t_i < \beta_i, \ (i = 1 - 3),$$

обладает в этой области непрерывными частными производными достаточно высокого порядка и отличными от нуля производными $\dfrac{\partial f}{\partial t_i} \equiv f_i'$, $(i = 1 - 3)$.

Проведем проективную классификацию рассматриваемых номограмм и найдем ассоциированные с ними канонические формы уравнения (2).

Случай А. Конике принадлежат шкалы $t_3,\ t_4$

Пусть в номограмме с уравнением (4) шкала t_2 криволинейна, t_1 — прямолинейна, а шкалы переменных t_3, t_4 лежат на одном и том же коническом сечении. Такую номограмму третьего жанра обозначим $T_{(2)}^{(34)}$. Этой номограмме поставим в соответствие граф (его также обозначим $T_{(2)}^{(34)}$), состоящий из одного конического сечения — носителя шкал переменных t_3, t_4 и двух прямых: прямой, являющейся носителем переменного t_1, и оси α пересечения плоскостей $y = 0,\ z = 0$. Абсциссы точек пересечения коники и прямой с осью α обозначим соответственно $a_{34},\ \alpha_{34},\ a_1$.

Граф $T_{(2)}^{(34)}$ имеет три ветви. Вкладывая в понятия «узла» и «индекса» узла графа тот же смысл, что и в работе [3], нетрудно видеть, что возможны лишь графы с символами:

$$[(3)],\ [(2),(1)],\ [(1),(1),(1)]. \qquad (5)$$

Теорема 1. *Номограммы $T_{(2)}^{(34)}$ с уравнением (4) с графами символов (5) образуют в точности четыре проективно различных (с точностью до параметризации шкал) типа.*

Два графа с различными символами, очевидно, непроективны. В зависимости же от того, какие из ветвей t_1, t_{34} выходят из каждого узла оси α, графы с данным символом разбиваются на проективно различные типы.

С символом $[(3)]$ существует один тип графа

$$[(t_1, t_{34}, t_{34})] \text{ при } a_1 = a_{34} = \alpha_{34}. \qquad (6)$$

С символом $[(2),(1)]$ возможны графы двух проективно различных типов:

$$[(t_1, t_{34}), (t_{34})] \text{ при } a_1 = a_{34} \neq \alpha_{34}, \qquad (7)$$

$$[(t_{34}, t_{34}), (t_1)] \text{ при } a_{34} = \alpha_{34} \neq a_1. \qquad (8)$$

Существует один тип графа с символом $\left[(1),(1),(1)\right]$, а именно:

$$\left[(t_1,),(t_{34}),(t_{34})\right] \text{ при } a_1 \neq a_{34} \neq \alpha_{34},\ a_1 \neq \alpha_{34}. \qquad (9)$$

Таким образом, существует, по меньшей мере, четыре типа непроективных графов.

Покажем, что их в точности четыре.

Пусть имеются два графа одного и того же типа: $T_{(2)}^{(34)}$ с ветвями t_1, t_{34} и $\overline{T}_{(2)}^{(34)}$ с ветвями $\overline{t_1}$, $\overline{t}_{34}$. Существует проективное преобразование пространства, совмещающее оси координатных систем, при этом в плоскости $y=0$ окажутся ветви $t_1, \overline{t_1}$, а в плоскости $z=0$ — ветви t_{34}, $\overline{t_{34}}$. Поскольку на оси Ox (оси $\overline{\alpha}$ графа $\overline{T}_{(2)}^{(34)}$, совпавшей с осью α графа $T_{(2)}^{(34)}$) имеется не более трех точек пересечения ветвей t_1, t_{34} и трех точек пересечения ветвей $\overline{t_1}$, $\overline{t_{34}}$, то после подходящей коллинеации можем считать, что $\overline{a}_1 \equiv a_1$, $\overline{a}_{34} \equiv a_{34}$, $\overline{\alpha}_{34} \equiv \alpha_{34}$. Последующей гомологией с осевой плоскостью $z=0$ можно совместить прямые $\overline{t_1}$ и t_1, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Существует точно четыре канонические формы уравнений (2), представимых номограммами $T_{(2)}^{(34)}$ с уравнением (3).*

В работе [4] показано, что уравнения (4) номограмм $T_{(2)}^{(34)}$ приводятся к каноническим формам:

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 + F_4,\ I_{(2)} \qquad F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 \cdot F_4,\ II_{(2)}$$

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = \frac{1}{F_3 + F_4},\ III_{(2)} \qquad F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = \frac{1}{F_3 \cdot F_4 + 1},\ IV_{(2)}$$

причем к этим формам приводятся уравнения (4) соответственно типов (6), (7), (8), (9).

Следовательно, если уравнение (2) представимо номограммой $T_{(2)}^{(34)}$, то оно обязательно приводится к одной из указанных канонических форм. В работе [5] доказана несовместность уравнений $I_{(2)} - IV_{(2)}$, что говорит о существовании точно четырех канонических уравнений $I_{(2)} - IV_{(2)}$ для уравнений (2), представимых номограммой $T_{(2)}^{(34)}$. Отсюда также следует, что уравнение (2), представимое номограммой $T_{(2)}^{(34)}$, приводится к одной и только одной из этих канонических форм. Условия представимости уравнения (2) номограммой $T_{(2)}^{(3\,4)}$ указаны в работах [6–8].

Замечание. Аналогичные результаты можно было бы получить для случая, когда в номограмме (4) шкала t_1 криволинейная, t_2 — прямолинейная, а шкалы t_3, t_4 принадлежат одной конике (обозначим их как $T_{(1)}^{(3\,4)}$). Сформулируем эти результаты.

1. Существует в точности четыре проективно различных (с точностью до параметризации шкал) типа номограмм $T_{(1)}^{(3\,4)}$.

2. Существует точно четыре канонические формы уравнений (2), представимых номограммами типа $T_{(1)}^{(3\,4)}$, а именно:

$F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = F_3 + F_4$, $I_{(1)}$	$F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = F_3 \cdot F_4$, $II_{(1)}$
$F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = \dfrac{1}{F_3 + F_4}$, $III_{(1)}$	$F_1 \cdot F_2 + \Phi_1 = \dfrac{1}{F_3 \cdot F_4 + 1}$, $IV_{(1)}$

Случай В. Конике принадлежат шкалы t_1, t_2

Пусть в номограмме с уравнением (4) одна из шкал t_j $\left(j = 3{,}4 \right)$ криволинейна, другая — прямолинейна, а шкалы t_1, t_2 лежат на общей конике. Такую номограмму третьего жанра обозначим $T_{(j)}^{(1\,2)}$. Как и в случае А), нетрудно было бы получить следующие результаты [3]:

1. Существует в точности по четыре проективно различных (с точностью до параметризации шкал) типов номограмм $T_{(j)}^{(1\,2)}$ (для *j* = 3, *j* = 4*),* а именно:

$$\left[\left(t_{12}, t_{12}, t_j \right) \right] \quad \text{при } a_{12} = \alpha_{12} = a_j; \tag{10}$$

$$\left[\left(t_{12}, t_j \right), \left(t_{12} \right) \right] \quad \text{при } a_{12} = a_j \neq \alpha_{12}; \tag{11}$$

$$\left[\left(t_{12}, t_{12} \right), \left(t_j \right) \right] \quad \text{при } a_{12} \neq \alpha_{12} \neq a_j; \tag{12}$$

$$\left[\left(t_{12} \right), \left(t_{12} \right), \left(t_j \right) \right] \quad \text{при } a_{12} \neq \alpha_{12} \neq a_j, \; a_{12} \neq a_j. \tag{13}$$

2. Существует точно по четыре канонических формы уравнений (2), представимых номограммами $T_{(j)}^{(1\,2)}$ (для *j* = 3, *j* = 4), а именно:

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = F_1 + F_2,\ I_{(j)} \qquad F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = F_1 \cdot F_2,\ II_{(j)}$$

$$F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = \frac{1}{F_1 + F_2},\ III_{(j)} \qquad F_3 \cdot F_4 + \Phi_j = \frac{1}{F_1 \cdot F_2 + 1},\ IV_{(j)}$$

причем к ним приводятся уравнения (4) номограмм $T_{(j)}^{(12)}$ соответственно типов (10), (11), (12), (13).

3. Несовместность канонических форм $I_{(j)} - IV_{(j)}$ показана в работах [4, 8]. Следовательно, если уравнение (2) представимо номограммой $T_{(j)}^{(12)}$, то оно обязательно приводится к каноническим формам $I_{(j)} - IV_{(j)}$ и только к одной из них. Условия приводимости при $j=3$ получены в [5], при $j=4$ — в [9].

Из изложенных результатов имеют место два следствия.

Следствие 1. *Одно и то же уравнение (2) может быть представимо номограммами (4) как первого жанра* $T_{(k)}\left(k=1-4\right)$, *так и третьего жанра* ($T_{(1)}^{(34)}$, $T_{(2)}^{(34)}$, $T_{(j)}^{(12)}\left(j=3{,}4\right)$), *относящихся к какой-либо одной из канонических форм* $I_{(j)} - IV_{(j)}$ $(j=1-4)$.

Следствие 2. *Если уравнение (2) допускает номограмму (4) первого жанра с криволинейной шкалой* $t_j, \left(j=1{,}2\right)$ *(номограмму* $T_{(j)}$*), то оно допускает и номограмму третьего жанра, получающуюся из* $T_{(j)}$ *заменой пары прямолинейных носителей* t_3, t_4, *принадлежащих одной полуплоскости номограммы (4*), одним коническим сечением, удовлетворяющим условию: число точек пересечения с осью* α *носителей шкал переменных* t_1, t_3, t_4 *сохраняется.*

Аналогично производятся замены при переходе от номограмм первого жанра $T_{(3)}$, $T_{(4)}$ к номограммам соответственно $T_{(3)}^{(12)}$, $T_{(4)}^{(12)}$.

Заметим, что для случаев, когда одна из шкал t_1, t_4 — криволинейная, результаты получаются аналогичные, стоит только поменять ролями переменные t_2, t_1 — в первом случае, t_3, t_4 — во втором. Результаты исследований отражены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Топологически эквивалентные графы номограмм с криволинейной шкалой t_m $(m=1;2)$

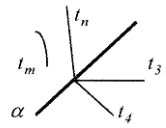
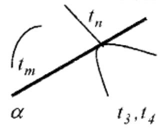
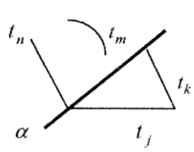
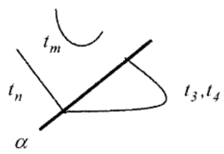
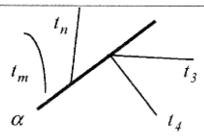
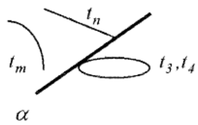
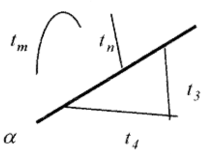
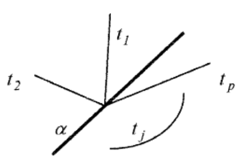
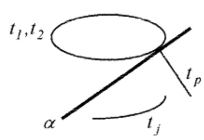
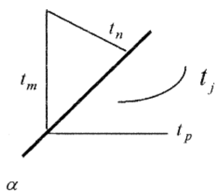
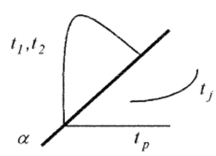
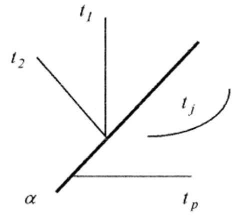
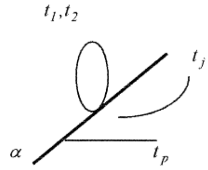
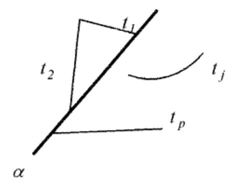
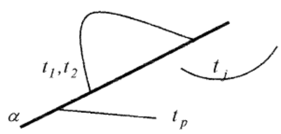
№№	Каноническая форма	Допускаемые проективно различные типы номограмм	
		I жанра	III жанра
$I_{(m)}$	$F_m F_n + \Phi_m = F_3 + F_4$ $(m, n = 1,2;\ m \neq n)$		
$II_{(m)}$	$F_m F_n + \Phi_m = F_3 F_4$ $(m, n = 1,2;\ m \neq n)$	$k, j = 3,4;\ k \neq j$ 	
$III_{(m)}$	$F_m F_n + \Phi_m = \frac{1}{F_3 + F_4}$ $(m, n = 1,2;\ m \neq n)$		
$IV_{(m)}$	$F_m F_n + \Phi_n = \frac{1}{F_3 F_4 + 1}$ $(m, n = 1,2;\ m \neq n)$		

Таблица 2

Топологически эквивалентные графы номограмм с криволинейной шкалой t_j $(j=3;4)$

№№	Каноническая форма	Допускаемые проективно различные типы номограмм	
		I жанра	III жанра
$I_{(j)}$	$F_p F_j + \Phi_j = F_1 + F_2$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$		
$II_{(j)}$	$F_p F_j + \Phi_j = F_1 F_2$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$	$m, n = 1,2;\quad m \neq n$ 	
$III_{(j)}$	$F_p F_j + \Phi_j = \dfrac{1}{F_1 + F_2}$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$		
$IV_{(j)}$	$F_p F_j + \Phi_j = \dfrac{1}{F_1 F_2 + 1}$ $(p, j = 3,4;\ p \neq j)$		

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бляшке В.* Введение в геометрию тканей. — М., 1959.
2. *Soreau R.* Nomographie ou Traité des Abaques. — Paris, 1921. — T. 1. — P. 345.
3. *Рудаков Б. П.* О представлении уравнений с четырьмя переменными некоторыми видами составных номограмм второго и четвертого жанров // Вестн. Тюм. ун-та. — 2005. — № 4. — С. 121–130.
4. *Рудаков Б. П.* Условия и методы спрямляемости некоторых пространственных тканей, номографирования уравнений и приведения их к каноническим формам. — Тюмень: Вектор Бук, 2003. — 246 с.

5. *Дураков (Рудаков) Б. П.* О приведении уравнений с четырьмя переменными к каноническим формам пятого номографического порядка // Номограф. сб. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1969. — № 6. — С. 190–199.

6. *Дураков (Рудаков) Б. П.* Составные номограммы первого жанра с четырьмя переменными // Уч. зап. Свердл. пед. ин-та. — 1965. — Вып. 31. — С. 50–72.

7. *Дураков (Рудаков) Б. П.* О представлении уравнений с четырьмя переменными составными номограммами первого жанра с прямолинейной ответной шкалой // Материалы I межвуз. конф. СССР. — М., 1965. — С. 24–25.

8. *Рудаков Б. П.* О приведении уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам, допускающим представление составными шкальными номограммами первого жанра // Вестн. Тюм. ун-та. — 2005. — № 4. — С. 112–121.

9. *Дураков (Рудаков) Б. П.* К вопросу единственности спрямляемости некоторых пространственных нешестиугольных тканей // Тр. Тюм. индустр. ин-та «Бурение скважин и трубопроводный транспорт нефти и газа». — Тюмень, 1969. — С. 264–280.

B. P. Rudakov

ON PRESENTING EQUATIONS WITH FOUR VARIABLES BY CERTAIN KINDS OF THE THIRD GENRE COMPOUND NOMOGRAMS

The article considers compound scale nomograms from the third genre aligned points of special kind for equations with four variables. In terms of webs geometry, subject to studying being special classes of non-hexagonal webs, with reference to conditions of their rectifiability. Determined, corresponding canonical forms, constituting a complete and incompatible group.