

В. Л. Якушев, А. А. Мулюкин

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Статья посвящена исследованию деформаций геометрически нелинейных плоских криволинейных стержней. Получена система из шести уравнений при произвольных смещениях и углах поворота для случая введения вязкости в реологические соотношения. Численное решение системы велось пошаговым методом. На основе развитой теории можно проводить моделирование нелинейных деформаций и потери устойчивости трубопроводов и других элементов конструкций в нефтегазовой промышленности.

1. Уравнения нелинейного деформирования стержней

В системе координат x, y рассмотрим стержень, срединная линия которого определяется плоской кривой $x = x(s), y = y(s)$ (рис. 1). Координаты срединной линии x, y , угол наклона φ между касательной к срединной линии и осью x , радиус кривизны r , момент инерции сечения J относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости x, y , являются известными функциями длины дуги срединной линии s . Соответствующие величины в начальном недеформированном состоянии обозначаются индексом «ноль». Ось z вдоль нормали к срединной линии в плоскости x, y направим так, чтобы касательная и нормаль составляли правую систему координат. В такой постановке задача деформирования стержней близка к задаче об осесимметричном нагружении оболочек вращения [1, 2].

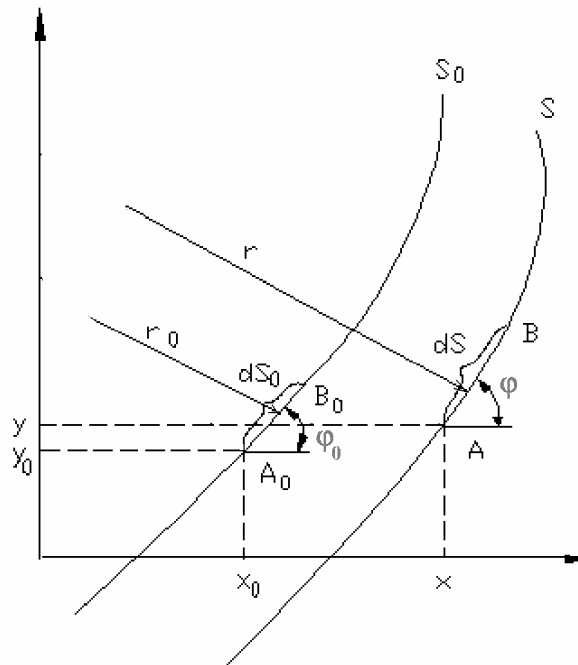


Рис. 1. Начальное и конечное состояния стержня

Деформации ε_φ на расстоянии z по нормали от срединной линии на основании гипотез Кирхгофа — Лява равны:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon - zk, \quad \varepsilon = \frac{ds}{ds_0} - 1, \quad k = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}. \quad (1.1)$$

Координаты срединной линии в деформированном состоянии определяются уравнениями:

$$\frac{d\varphi}{ds_0} = k + \frac{1}{r_0}, \quad \frac{dx}{ds_0} = (1 + \varepsilon)\cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds_0} = (1 + \varepsilon)\sin\varphi. \quad (1.2)$$

В слагаемых типа $1 + \varepsilon$ не всегда можно приближенно принимать $1 + \varepsilon \approx 1$. Это следует делать, каждый раз производя соответствующие оценки [3].

Уравнения равновесия в случае немалых смещений и углов поворота записываются для деформированного состояния следующим образом:

$$\frac{dQ}{ds_0} + N\left(k + \frac{d\varphi_0}{ds_0}\right) + p_z = 0, \quad \frac{dN}{ds_0} - Q\left(k + \frac{d\varphi_0}{ds_0}\right) + p_\varphi = 0, \quad \frac{dM}{ds_0} - Q = 0, \quad (1.3)$$

где Q — поперечная сила, N — продольная сила, M — изгибающий момент, p_φ и p_z — соответственно касательная и нормальная к срединной линии составляющие внешней распределенной нагрузки.

В случае упругих деформаций связь между силовыми факторами, деформацией и кривизной срединной линии определяется соотношениями:

$$N = EF\varepsilon, \quad M = -EJk, \quad (1.4)$$

где E — модуль упругости.

Разрешающая система уравнений для нелинейных деформаций стержня может быть построена следующим образом. Силовые факторы N , M в уравнениях равновесия (1.3) выражаются через деформацию и кривизну из (1.4). К преобразованным таким образом уравнениям добавлены выражения (1.2). В результате получена система из шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$\frac{d\Phi}{ds_0} + \mathbf{B} = 0, \quad (1.5)$$

$$\Phi = [Q, \varepsilon, k, \varphi, x, y]^T, \quad \mathbf{B} = [b_i(p_\varphi, p_z, Q, \varepsilon, k, \varphi, x)]^T, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (1.6)$$

Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями, причем сумма последних должна быть равна шести. В ряде случаев уравнение для y может решаться отдельно от остальных уравнений.

2. Метод реологической вязкости для исследования потери устойчивости стержней

Рассмотрим решение задач устойчивости при введении дополнительной вязкости в реологические уравнения. В этом случае удается по единому алго-

ритму без смены параметров решать нелинейные задачи деформирования и устойчивости, находить устойчивые до- и закритические состояния [3].

Простейшей моделью ползучести, позволяющей смоделировать непрерывный процесс перехода от докритического к закритическому состоянию без учета инерционных сил, является тело Фойхта:

$$s_{ij} = 2G(\tau \dot{e}_{ij} + e_{ij}), \quad K\sigma = \tau \dot{\varepsilon} + \varepsilon, \quad (2.1)$$

где e_{ij} и s_{ij} — девиаторы деформаций и напряжений. Точка над переменной означает дифференцирование по времени t , а τ — постоянная:

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad K = \frac{1-2\nu}{E}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2.2)$$

где ε_{ij} и σ_{ij} — соответственно компоненты тензоров деформаций и напряжений. При $\dot{e}_{ij} = 0$ получаем закон Гука.

При введении реологической вязкости, согласно (2.1), получаем выражения для силы и момента:

$$N = EF(\varepsilon + \tau \dot{\varepsilon}), \quad M = -EJ_z(k + \tau \dot{k}). \quad (2.3)$$

По аналогии с (2.3) для поперечной силы Q водится величина γ :

$$Q = EF(\gamma + \tau \dot{\gamma}). \quad (2.4)$$

Величине γ здесь не придается механического смысла, т. е. она не рассматривается как сдвиговая деформация. Она вводится только для перехода в первом уравнении равновесия (1.3) к дифференциальной зависимости от времени.

Построение разрешающей системы уравнений осуществлялось в такой последовательности. Выражения для сил и моментов (2.3) и (2.4) подставлялись в уравнения равновесия (1.3). В качестве примера выпишем окончательный вид первого из этих уравнений:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s_0 \partial t} + \left(k + \frac{1}{r_0}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial s_0} + \left(k + \frac{1}{r_0}\right) \varepsilon + \frac{1}{EF} p_z \right\} = 0. \quad (2.5)$$

Другие три уравнения были получены после дифференцирования по t выражений для координат срединной поверхности (1.2) и последующего сложения с ними в исходной форме. Так для перемещений вдоль оси симметрии y имеем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s_0 \partial t} - \sin \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - (1 + \varepsilon) \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial y}{\partial s_0} - (1 + \varepsilon) \sin \varphi \right\} = 0. \quad (2.6)$$

В результате была получена система из шести уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + \mathbf{B} \right\} = 0, \quad \Phi = [\gamma, \varepsilon, k, \varphi, x, y]^T. \quad (2.7)$$

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} размером 6×6 являются функциями элементов столбца Φ , которые в свою очередь являются функциями времени t и координаты s_0 .

Части уравнений, стоящие в фигурных скобках в (2.7), есть нелинейные дифференциальные выражения типа стоящих в фигурных скобках в (2.5) и (2.6). Система

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + \mathbf{B} = 0$$

совпадает с (1.5) (с точностью до связи $Q = EF\gamma$) и дает решение статической задачи, что, как следует из (2.7), может быть только при $\partial \Phi / \partial t = 0$.

В общем случае опирания и нагружения на каждом из краев оболочки могут быть заданы три условия вида:

$$s_0 = 0, \quad \mathbf{D}^1 \cdot \Phi + \mathbf{G}^1 = 0; \quad s_0 = L, \quad \mathbf{D}^2 \cdot \Phi + \mathbf{G}^2 = 0. \quad (2.8)$$

Матрицы $\mathbf{D}^l = [d_{lm}^l]$, $\mathbf{G}^l = [g_m^l]^T$, $\mathbf{D}^2 = [d_{lm}^2]$, $\mathbf{G}^2 = [g_m^2]^T$ ($l = 1, \dots, 6$, $m = 1, 2, 3$) являются функциями Φ и могут меняться во времени.

Краевая задача относится к задаче Гурса — Римана. Интегрирование ведется в характеристическом колодце, ограниченном снизу характеристикой $t = 0$, а по краям — характеристиками $s_0 = 0$ и $s_0 = L$. Предполагается, что при $t = 0$ функция $\Phi(s_0)$ задана.

Скорости неизвестных могут быть приближенно заменены через отношение конечных приращений $\Delta \Phi = \Phi(t_l) - \Phi(t_{l-1})$ к приращению времени $\Delta t = t_l - t_{l-1}$, $l = 1, \dots, N_t$, $t_0 = 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \approx \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (2.9)$$

где N_t — количество шагов по времени до получения решения. Тогда система (2.7) может быть сведена к следующему виду:

$$\frac{d \Delta \Phi}{ds_0} + \mathbf{A} \Delta \Phi + \frac{\Delta t}{\tau} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + \mathbf{B} \right\} = 0. \quad (2.10)$$

Если при некотором $t = t_l$ известно распределение Φ вдоль s_0 , тогда могут быть найдены $\partial \Phi / \partial s_0$, матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} как функции от s_0 . По отношению к приращениям $\Delta \Phi$ система (2.10) будет системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3]. Производные по координате s_0 аппроксимировались конечно-разностной схемой второго порядка точности. На каждом временном слое двухточечная краевая задача решалась методом ортогональной прогонки Годунова [4]. По t использовалась схема первого порядка точности с переменным шагом. При этом для ряда точек вдоль образующей необходимо хранить в памяти ЭВМ компоненты Φ с предыдущего шага по t .

Проблемы выбора параметра вязкости τ не существует, так как может быть введено безразмерное время $T = t/\tau$, и решение будет функцией от T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширко И. В., Якушев В. Л. Осесимметричная деформация гибких оболочек вращения из материала со сложной реологией // Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, 1973. — Л.: Судостроение, 1975.
2. Ширко И. В., Якушев В. Л. Физически и геометрически нелинейные деформации оболочек вращения // Изв. АН СССР, МТТ. — 1975. — № 6. — С. 103–109.
3. Якушев В. Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. — М.: Наука, 2004. — (Сер. Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения).
4. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 3.

V. L. Yakushev, A. A. Mulyukin

NON-LINEAR STRAINS AND RIGIDITY OF FLAT CURVILINEAR BARS

The article is devoted to investigation of strains in geometrically non-linear flat curvilinear bars. Obtained, a system of six equations under arbitrary shifts and turning angles for a case of introducing toughness into rheological correlations. A numerical solution of the system was done using step-by-step method. Basing on mature theory, one could simulate non-linear strains and loss of rigidity in pipelines and other elements of constructions used in oil-and-gas industry.