Ю. К. Шлык, Н. П. Медведева

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА

Рассмотрена специфика решения гидродинамических задач применительно к сердечно-сосудистой системе человека. Приведена линеаризованная система уравнений движения крови в кровеносном сосуде, которая позволила установить появление радиальной составляющей колебаний стенки, при движении «пульсовой волны» по сосуду. Показано, что с ее использованием можно осуществить регистрацию всех возможных отклонений исходного режима движения крови, вызванных различного рода патологиями стенки сосуда.

Моделирование системы кровообращения человека представляет собой сложную математическую задачу, актуальность решения которой отмечена многими авторами [1–3] и не вызывает сомнения. Не претендуя на решение этой задачи в полном объеме, обратимся к ее части, наиболее проблемной с позиций возможного возникновения тех или иных патологий (склероз, наличие тромба и т. д.). Будем использовать классические методы гидродинамической теории применительно к сердечно-сосудистой системе человека.

Рассмотрим специфику движения крови в сосудах человека. Его кровеносные сосуды обладают особыми физическими свойствами. Прежде всего это упругоэластичный характер стенок сосуда. В подавляющем большинстве случаев при решении чисто технических задач постулируется условие: стенка трубки «абсолютно жесткая» ($U_r = 0$) [4] либо ее упругость соизмерима с упругостью среды, которая ее заполняет. Применительно к кровеносному сосуду это условие не выполняется, по сосуду бежит так называемая «пульсовая волна», нарушающая его изначально цилиндрическую форму [4]. Это объясняется тем, что модуль объемного сжатия крови практически совпадает с его значением для воды и составляет 2 ГПа. В то же время модуль упругости мягких тканей организма человека, относящихся к классу «водоподобных» сред (различные сорта резин, силикон и т. д.) [5], определяется значениями порядка 0,02 ГПа. Попутно отметим, что для стали эта величина составляет 200 ГПа, что практически исключает возможность распространения поверхностной волны давления по стенке стального волновода. То есть в этом случае выполнение глубокого неравенства $U_x >> U_r$ реализуется в полной мере.

Возвращаясь к ситуации движения «пульсовой волны» по кровеносному сосуду, отметим, что появление радиальной составляющей U_r позволяет осуществить регистрацию всех возможных отклонений исходного режима движения крови в сосуде вне зависимости от источника его происхождения. Это может быть изменение ритма работы сердца [6], гемодинамических характеристик движения крови, вызванных изменением физических и физиологических свойств (сужение проходного сечения, склеротирование стенки сосуда и т. д.) самого кровеносного сосуда. Так или иначе, реализуется принципиальная возможность регистрации этих патологий методами неразрушающего, в данном случае акустическим, контроля, которые хорошо известны в технике [7].

С позиций классической гидродинамики движение любой реальной среды (газ, жидкость, многофазные среды) описывается известным уравнением Навье — Стокса, которое в совокупности с уравнениями неразрывности, состояния (зависимость плотности среды от давления и температуры) и баланса тепла образуют замкнутую систему [8–10]. Однако ее решение в общем виде сопряжено с практически неопределенными математическими сложностями, главным образом за счет нелинейности уравнений. Тем не менее эти сложности могут быть преодолены, если речь идет о решении конкретных практических задач.

Сформулируем условия, при которых возможно упрощение (линеаризация) названных выше уравнений. Пусть движение среды осуществляется в каналах или трубах. Последнее условие, безусловно, является приоритетным, и, значит, можно говорить об осесимметричном движении среды в трубках, с теми или иными свойствами ее стенок. В случае, когда скорость движения среды много меньше, чем скорость звука в самой среде, уравнение неразрывности реализуется автоматически (отсутствует явление кавитации). Среда должна быть термостатирована, а амплитуда колебаний давления не должна приводить к изменениям плотности и вязкости самой среды. Последнее условие связано с тем, что при незначительных колебаниях скорости в потоке ее можно представить в виде скорости при стационарном режиме. Это позволяет осреднить скорость движения среды по сечению трубопровода главным образом при ее турбулентном режиме [11]. Принятые к рассмотрению ограничения являются тем главным аргументом, который позволяет линеаризовать систему уравнений движения среды, названных выше.

Использовав цилиндрическую систему координат, т. е. предполагая движение среды в трубке круглого сечения, применительно к сосудам человека получим [12]

$$\frac{\partial U_x}{\partial t}+U_x\cdot\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_r\cdot\frac{\partial U_x}{\partial r}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_x}{\partial r}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{U_r}{r}\right)\right], \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial t}+U_r\cdot\frac{\partial U_r}{\partial r}+U_x\cdot\frac{\partial U_r}{\partial x}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}+\frac{4}{3r}\cdot\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{4}{3}\cdot\frac{U_r}{r^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial U_x}{\partial r}+\frac{\partial U_r}{\partial x}\right)\right], \qquad (2)$$

где U_x и U_r — проекции скорости движения среды на оси x и r;

x — осевая координата;

r — радиальная;

φ — угловая координата предполагается равной нулю при отсутствии закручивания потока;

ρ — плотность крови;

ν — кинематическая вязкость крови;

P — давление.

Представленные уравнения (1) и (2) — линеаризованный вариант уравнений Навье — Стокса по координатам x и r.

Дальнейшие упрощения, а именно термостатирование, позволяют принять вязкость среды постоянной, можно сразу перейти к уравнению неразрывности, которое в той же системе цилиндрических координат примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\cdot\frac{\partial U_r}{\partial r}+\rho\cdot\frac{U_r}{r}+\rho\cdot\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_r\cdot\frac{\partial \rho}{\partial r}+U_x\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}=0\,. \qquad (3)$$

Дальнейшее упрощение уравнений (1)–(3) основано на пренебрежении членами высоких порядков. В итоге имеем [12]

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+2\cdot\frac{\tau_{\text{он}}}{\rho_0 r_0}\,,$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t}=E_{\text{пр}}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\,, \qquad (4)$$

где P — осредненное давление по сечению сосуда;

$V = Q/\pi r_0^2$ — средняя скорость в сечении трубки радиуса r_0 при заданном расходе среды Q;

$E_{\text{пр}}$ — приведенный модуль упругости стенки сосуда;

$\tau_{\text{он}}=-\rho_0\cdot\nu\left(\frac{\partial U_x}{\partial r}\right)_{|r=r_0}$ — нестационарное касательное напряжение на внутренней поверхности стенки, а $\left.\frac{\partial U_x}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ — градиент скорости на стенке сосуда радиуса r_0.

Последние два параметра, входящие в систему уравнений (4), требуют комментариев, поскольку именно они в наибольшей степени определяют режим движения среды в трубке даже при всех названных выше ограничениях.

Для определения параметра $E_{\text{пр}}$ воспользуемся ранее полученными соотношениями [4]

$$c=\frac{c_0}{\sqrt{1+\frac{2r_0}{\delta E'\beta_0}}}\,, \qquad (5)$$

где c_0 — скорость звука в неограниченной среде заданных свойств;

c — скорость звука в волноводе с упругими стенками;

$E'=\frac{E}{1-\nu_{\text{п}}{}^2}$ — модуль упругости материала стенки;

$\nu_{\text{п}}$ — коэффициент Пуассона;

β_0 — сжимаемость среды в трубке;

δ — толщина стенки.

Учитывая, что [5] $c_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \beta_0}}$, имеем $\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = 1 + \frac{2r_0}{\delta E' \beta_0}$ и далее

$$E_{\text{пр}} = \frac{E}{1 + \frac{2r_0}{\delta E' \beta_0}}. \tag{6}$$

Оценивая второй параметр базовой системы (4), а именно $\tau_{\text{он}}$, отметим, что его можно принять равным τ при установившемся режиме движения среды, если следовать гипотезе квазистационарности [11]. В соответствии с этой гипотезой при малых частотах распределение скоростей остается таким же, как и при установившемся движении. В этой связи речь идет об осреднении по периметру касательных напряжений на внутренней стенке волновода, тогда

$$\tau_{\text{он}} = \tau = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho_0 \cdot V^2, \tag{7}$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления в формуле Дарси — Вейсбаха, который можно определить по двум главным параметрам: шероховатости стенки трубки и числу Рейнольдса Re.

С учетом сказанного, приводим систему уравнений (4) к ее базовому виду, более удобному для дальнейшего практического использования:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + A \cdot V, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{E_{\text{пр}}} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $A = \frac{\lambda \rho_0 V}{4 r_0}$ — осредненный по сечению диссипативный параметр потерь энергии движения среды в волноводе на трение;

$E_{\text{пр}} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ — в соответствии с выражением (6) определяют переменность физико-механических свойств кровеносного сосуда с учетом различного рода патологий.

Линеаризованная система уравнений (8) может быть использована для анализа режима движения крови в кровеносных сосудах любого типа, причем данная система уравнений позволяет моделировать различные возможные отклонения от номинального режима путем изменения значений входящих в нее параметров.

К числу наиболее проблемных с клинической точки зрения относятся следующие патологии: сужение внутреннего диаметра сосуда, обусловленное отложением холестериновых бляшек; образование локального тромба на внутренней стенке сосуда в наиболее проблемных зонах (например, вены нижних конечностей); истончение стенки сосуда, вызванное ее расслоением (аневризм), приводящее к его возможному разрыву [13, 14]. Все вышесказанное делает решение проблем диагностики такого рода патологий сосудистой системы чрезвычайно актуальным.

Вернемся к вопросу обоснованности использования базовой системы уравнений (8) для решения задач, связанных с различного рода патологиями сосудистой системы человека.

Прежде всего, отметим, что движение крови в сосуде является однонаправленным и осесимметричным. Такие параметры, как вязкость и плотность, остаются неизменными по причине естественного термостатирования организма человека, а также малости амплитуды пульсаций давления, вызываемых сокращением сердечной мышцы, которая для артерий составляет 5 кПа ≈ 40 мм рт. ст. [15].

Кровь как физическая среда, заполняющая волновод с упругоэластичными стенками, может быть отнесена к классу ньютоновских жидкостей (турбулентный режим движения в крупных сосудах). Ее базовые параметры:

— средняя скорость течения даже в таких сосудах, как аорта, не превышает ≈ 0,5 м/с [13, 16];

— скорость звука в крови, по данным [13], находится в пределах 1500–1600 м/с;

— вязкость крови (для здорового человека) лежит в диапазоне $(4–5)\cdot 10^{-3}$ Па·с, а в условиях патологии принимает значения $(2–23)\cdot 10^{-3}$ Па·с (для дистиллированной воды этот параметр принимается равным $1\cdot 10^{-3}$ Па·с);

— плотность крови лишь на ≈ 5 % больше плотности той же дистиллированной воды [17].

Перечисленные выше особенности движения крови в сосуде, а также физические характеристики ее как материальной среды позволяют сделать следующие выводы.

Базовая система уравнений (8), на наш взгляд, дает возможность максимально точно описать характер гемодинамических процессов движения крови в упругоэластичных сосудах. Это касается всех типов сосудов, от аорты и полой вены, где числа Рейнольдса составляют $(3–3{,}5)\cdot 10^{3}$ и могут доходить до $6\cdot 10^{3}$, до капилляров, где $\mathrm{Re} \approx 2\cdot 10^{-3}$ [16].

Любые изменения гемодинамического режима движения в крови, вызываемые главным образом наличием патологий стенок сосуда, можно зарегистрировать по изменению АЧХ-спектра радиальных колебаний самих стенок за счет их естественных упругоэластичных свойств. При этом спектр АЧХ радиальных колебаний стенки сосуда может быть зарегистрирован безотносительно к его конкретной технической реализации.

Базовые физические свойства крови в сочетании с идентичностью упругих свойств таких «водоподобных» сред, как резина и сосуды человека, позволяют проводить широкомасштабные исследования по заявленной проблеме. При этом в качестве физического аналога сосуда рационально использовать силиконовую трубку соответствующей длины, диаметра и толщины, а в качестве крови — обычную воду.

Первые предварительные результаты экспериментальных исследований уже подведены и расцениваются как весьма обнадеживающие [18].

В заключение отметим, что дальнейшие теоретические исследования по данной проблеме должны быть переведены в плоскость моделирования различных ситуаций, связанных с патологиями стенок сосуда. С учетом вышеизложенного наиболее рациональным представляется выбор метода электродинамических аналогий [19], базирующегося на идентичности дифференциальных уравнений системы (8) и распределении токов и напряжений вдоль длинной электрической линии [11, 12 и др.]; такой подход является сегодня общепризнанным [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лищук В. А.* Реализация математической модели элементарного сосудистого участка в среде LabVIEW, ориентированной на кардиохирургическую клинику // Клиническая физиология кровообращения. — 2006. — № 4. — С. 67–81.
2. *Компьютер* и мозг: Новые технологии. — М.: Наука, 2005. — 321 с.
3. *Компьютерные* модели и прогресс медицины. — М.: Наука, 2001. — 300 с.
4. *Заремба Н. П., Шлык Ю. К., Кузнецов В. А.* Специфика развития волнового процесса в трубопроводе с упругими стенками // Изв. вузов. «Нефть и Газ» ТюмГНГУ. — 2006. — № 3. — С. 61–66.
5. *Исакович М. А.* Общая акустика. — М.: Наука, 1973. — 496 с.
6. *Бокерия Л. А., Кузьмин В. И., Ключников И. В.* Проблемы исследования ритмов в кардиологии // Клиническая физиология кровообращения. — 2006. — № 4. — С. 5–11.
7. *Приборы* для неразрушающего контроля материалов и изделий: Справ.: В 2 кн. / Под. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Клюева. — Кн. 2. — М.: Машиностроение, 1976. — 328 с.
8. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970. — 904 с.
9. *Джеймсон Э. Мюллер Т. и др.* Численные методы в динамике жидкости. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
10. *Гидродинамика* кровообращения: Сб. переводов под. ред. С. А. Регирера. — М.: Мир, 1971. — 270 с.
11. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Недра, 1975. — 296 с.
12. *Попов Д. Н.* Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. — М.: Машиностроение, 1976. — 424 с.
13. *Лелюк В. Г., Лелюк С. Э.* Ультразвуковая ангиология. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Реальное время, 2003. — 336 с.
14. *Элифтеридис Дж.* Пульс смерти // В мире науки. — 2005. — № 11. — С. 45–52.
15. *Парашин В. Б., Иткин Г. П.* Биомеханика кровообращения. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 224 с.
16. *Бегун П. И., Афонин П. Н.* Моделирование в биомеханике. — М.: Высш. шк., 2004. — 390 с.
17. *Биофизические* характеристики тканей человека: Справ. / Березовский В. А., Колотилов Н. Н.; Отв. ред. и авт. предисл. П. Г. Костюк. — Киев: Наук. думка, 1990. — 224 с.
18. *Заремба Н. П., Шлык Ю. К.* Результаты экспериментальных исследований гидродинамических шумов в трубопроводе с упруго-эластичными стенками // Сб. тр. ИНиГ (В печати).
19. *Ольсон Г.* Динамические аналогии. — М.: Изд-во иностр. лит., 1947. — 224 с.
20. *Мосткова Е. В.* Математическая модель сердца // Клиническая физиология кровообращения. — 2006. — № 4. — С. 26–33.

Yu. K. Shlyk, N. P. Medvedeva

USE OF METHODS TO SOLVE PROBLEMS OF HYDRODYNAMICS AS APPLIED TO MAN'S CARDIOVASCULAR SYSTEM

The article considers specificity of hydrodynamic problems as applied to man's cardiovascular system. Cited, a linearized system of equations with respect to bloodstreaming through blood vessel, which enabled to establish an occurrence of radial constituent in blood wall's oscillations under propagation of "pulse wave" through blood vessel. It is shown that, using this, one could register every possible deviation from the initial bloodstream performance caused by different pathological states of blood vessel's wall.