

П. В. Пикинеров, Т. А. Шмелева

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИДРОХИМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕФТЕЗАГРЯЗНЕННОСТИ ДНА ВОДОТОКА

*Рассмотрены вопросы идентификации параметров модели донных отложений на основе разнотемповой схемы измерений состояния дна и водной среды реки.*

Надежным индикатором загрязненности территории месторождения, дренированной сетью водотоков, являются показатели качества воды в створах. Эффективность такой схемы контроля определяется прежде всего детальностью представления и адекватностью модельного описания процессов миграции и ассимиляции примесей в водотоках [1], а также точностью контроля состояния качества водной среды.

Предложенная в настоящее время однокамерная гидрохимическая модель участка реки развивает ранее опубликованную [2] и учитывает массообменные процессы между четырьмя кумулятивными зонами: русло реки, береговая зона, ледовый купол и дно с соответствующими массами «подвижного» нефтезагрязнителя (НЗ)  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ ,  $M_3(t)$ ,  $M_4(t)$ . Используемые в модели упрощенные, физически понятные схемы линеаризованного описания массообменных процессов учитывают основные сезонные факторы прямых и вторичных загрязнений водотоков, характерных для гидрохимических условий Среднего Приобья.

$$\begin{cases} \dot{M}_1(t) = m_0(t) + mu(t) - m_1(t) + \alpha_u^T \cdot \mathbf{u}(t) - (\alpha_1^T \cdot \mathbf{v}_1(t) + \beta_1^T \cdot \omega_1(t) + \beta_3 + \beta_4) \cdot M_1(t) + \\ + \lambda_2^T \cdot \omega_2(t) \cdot M_2(t) + \lambda_3 \cdot M_3(t) + \lambda_4 \cdot M_4(t), \\ \dot{M}_2(t) = -(\alpha_2^T \cdot \mathbf{v}_2(t) + \lambda_2^T \cdot \omega_2(t)) \cdot M_2(t) + \beta_1^T \cdot \omega_1(t) \cdot M_1(t), \\ \dot{M}_3(t) = -(\alpha_3 + \lambda_3) \cdot M_3(t) + \beta_3 \cdot M_1(t), \\ \dot{M}_4(t) = -\alpha_4^T \cdot \mathbf{v}_4(t) \cdot M_4(t) + \beta_4 \cdot M_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $m_0(t) = c_0(t) \cdot Q_0(t)$ ,  $m_1(t) = c_1(t) \cdot Q_1(t)$  — массовые расходы загрязнителя на входе и выходе камеры,  $mu(t)$  — массовый расход контролируемых сбросов,  $mp(t) = \alpha_u^T \cdot \mathbf{u}(t)$  — массовый расход скрытых сбросов с неизвестным вектором интенсивностей  $\alpha_u \in R^l$ ,  $\alpha_1^T \cdot \mathbf{v}_1(t)$  — процесс биохимической деструкции НЗ в водотоке, в основном проявляющийся в летнее время под воздействием положительных температур ( $\Theta_1(t)$ ). Для береговой зоны ( $\alpha_2^T \cdot \mathbf{v}_2(t)$ ) и дна ( $\alpha_4^T \cdot \mathbf{v}_4(t)$ ) температурная составляющая биодеструкции ( $\Theta_2(t)$ ) дополнится процессами отвердевания и погребения паводковыми наносами:  $M_2(t_H) \cdot (\dot{E}(t))_+ \cdot (hp(t) - \overline{hp})_+$  и  $M_4(t_H) \cdot (\dot{E}(t))_+ \cdot (hp(t) - \overline{hp})_+$  соответственно. Здесь  $t_H$  — время начала снеготаяния,  $M_i(t_H)$  — состояние со-

ответствующей среды в момент начала снеготаяния, а  $E(t)$  — функция снеготаяния (рис. 1). Для льда же ( $\alpha_3$ ) явно выражено действие гравитационной составляющей.

Из водной среды происходит накопление НЗ на поверхности ледового купола ( $\beta_3$ ), дне ( $\beta_4$ ), а также береговой полосы ( $\beta_1^T \cdot \omega_1(t)$ ). Поступление на береговую полосу осуществляется в летний период времени, и интенсивность его зависит от уровня воды в водотоке ( $h(t)$ ).

Предложенная модель учитывает и процессы вторичного загрязнения: например, обратный сток НЗ с береговой полосы ( $\lambda_2^T \cdot \omega_2(t)$ ), в том числе, помимо уровня воды в водотоке, уровень поверхностной влаги ( $hp(t)$ ) и интенсивность выпадения осадков ( $e^\downarrow(t)$ ). Процессы вторичного загрязнения выражены также в виде отдачи с ледового покрова ( $\lambda_3$ ) и дна ( $\lambda_4$ ).

Под идентификацией понимается отношение  $U : I \rightarrow \hat{c}$ , устанавливающее по информации  $I$  о входе-выходных процессах вектор оценок  $\hat{c}$  параметров  $c$  уравнений, связывающих эти процессы. В рамках введенных обозначений блочный вектор искомых параметров

$$c_1 = col[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \beta_1 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \alpha_u]$$

имеет высокую размерность. Условие идентифицируемости требует значительной представительности данных выборки измеряемых процессов. Типовой набор данных имеет описание:

$$I = \left\langle M_1(t) \quad m_0(t) \quad m_1(t) \quad mu(t) \quad \left| \begin{array}{cccc} \Theta_1(t) & \Theta_2(t) & h(t) & hp(t) & e^\downarrow(t) \end{array} \right| \quad u(t) : t \in T_1 \right\rangle,$$

где выделены данные о состоянии и динамике загрязнений водной среды, метеоданные о температурах, влажности, осадках и индикаторная вектор-функция типизированных скрытых сбросов. Для простоты анализа типизируются два вида событий — постоянно действующий сброс и кратковременные аварийные сбросы. В названных предположениях выбор индикаторов  $u_i(t)$  определяется типом и временем  $t_u(i)$  начала действия события, а интенсивность его  $\alpha_{u_i}$  подлежит оцениванию.

Надежность параметрического оценивания модели (1) существенно повышается, если в набор контролируемых данных добавляется переменная  $M_4(t)$  — измерения массы донных отложений. В этом случае общая задача разбивается на последовательность из двух более простых с укороченными векторами оцениваемых параметров. Вначале идентифицируется модель донных отложений, а затем на основе полученных результатов решается задача оценки модели «водная среда — берег».

#### **Алгоритм идентификации модели донных отложений**

Основные положения теории параметрического оценивания поясним на задаче идентификации модели донных отложений (1).

$$\dot{M}_4(t) = -\mathbf{\alpha}_4^T \cdot \mathbf{v}_4(t) \cdot M_4(t) + \beta_4 \cdot M_1(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{\alpha}_4^T \cdot \mathbf{v}_4(t) = [\alpha_{41} \quad \alpha_{42} \quad \alpha_{43} + \lambda_4 \quad \alpha_{44}] \cdot \text{col}[\Theta_1(t)_+ \quad (\Theta_1(t) - \Theta_{10})_+ \quad 1 \quad (hp(t) - \overline{hp})_+ \cdot E(t)]$$

В реальной практике контроля загрязненности водных объектов замеры донных отложений  $M_4(t)$  реализуются гораздо реже, чем частота замеров качества воды  $M_1(t)$ . При надлежащем обустройстве контрольных створов водотока замеры концентрации НЗ могут быть реализованы в автоматическом режиме. Пусть  $\Delta t_1 = t_{k+1} - t_k$ , достаточно малый период измерений переменной  $M_1(t_k) = M_1(k)$  и вектора  $\mathbf{v}_4(k)$ . Перейдем от (2) к приближенному разностному анализу в дискретном времени.

$$\Delta M_4(k) = -\mathbf{\alpha}_4^T \cdot \mathbf{v}_4(k) \cdot M_4(k) + \beta_4 \cdot M_1(k), \quad k = \overline{1, N}, \quad t_1 = t_H, \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор правой разности первого порядка с дискретой  $\Delta t_1$ , т. е.  $\Delta x(k) = (x(k+1) - x(k)) / \Delta t_1$ . В условиях разнотемповости измерений  $M_1(k)$  и  $M_4(k)$  для построения итеративной процедуры оценивания воспользуемся формализмом операторной алгебры и проведем преобразования (3).

Пусть  $\mathbf{\alpha}_4(j)$ ,  $\beta_4(j)$  — оценки искоемых параметров модели (2)  $j$ -го приближения ( $\mathbf{\alpha}_4(1)$ ,  $\beta_4(1)$  — начальные значения априорно известны).

Представим  $\mathbf{\alpha}_4 = \mathbf{\alpha}_4(j) - \delta \mathbf{\alpha}_4(j)$  и перепишем (3) в виде

$$(\Delta + \mathbf{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{v}_4(k)) \cdot M_4(k) = \beta_4 \cdot M_1(k) + \delta \mathbf{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{v}_4(k) \cdot M_4(k).$$

Отсюда следует:

$$M_4(k) = \beta_4 \cdot M_{14}(j, k) + \delta \mathbf{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{x}_4(j, k) + M_4(1) \cdot e_4(j, k), \quad (4)$$

где  $M_{14}(j, k)$  и  $e_4(j, k)$ ,  $k = \overline{1, N}$  — процессы, генерируемые цифровыми фильтрами

$$\begin{aligned} (\Delta + \mathbf{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{v}_4(k)) \cdot M_{14}(j, k) &= M_1(k), \quad M_{14}(j, 1) = 0, \\ (\Delta + \mathbf{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{v}_4(k)) \cdot e_4(j, k) &= 0, \quad e_4(j, 1) = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

а  $\mathbf{x}_4(j, k)$  — вектор функция, удовлетворяющая уравнению

$$(\Delta + \mathbf{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{v}_4(k)) \cdot \mathbf{x}_4(j, k) = \mathbf{v}(k) \cdot M_4(k), \quad \mathbf{x}_4(j, 1) = 0,$$

не может быть воспроизведена из-за отсутствия данных частых измерений  $M_4(k)$ . Поэтому на основании (4) введем приближенную оценку процесса  $M_4(k)$  выражением

$$\widehat{M}_4(j, k) = \beta_4(j) \cdot M_{14}(j, k) + M_4(j, 1) \cdot e_4(j, k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (6)$$

где  $M_4(j, 1)$  — приближение начального значения в момент времени  $t_1$ . Тогда оценка процесса  $\mathbf{x}_4(j, k)$  может быть сгенерирована векторным фильтром по закону

$$(\Delta + \boldsymbol{\alpha}_4(j)^T \cdot \mathbf{v}_4(k)) \widehat{\mathbf{x}}_4(j, k) = \mathbf{v}(k) \cdot \widehat{M}_4(j, k), \quad \widehat{\mathbf{x}}_4(j, 1) = 0. \quad (7)$$

С учетом принятых определений (5)–(7) модель (4) может быть записана в линейном регрессионном виде

$$M_4(k) = \mathbf{c}_4(j)^T \cdot \mathbf{z}_4(j, k) + \xi_4(j, k), \quad (8)$$

где

$$\mathbf{c}_4(j)^T = \text{col}[\delta \boldsymbol{\alpha}_4(j) \quad \beta_4 \quad M_4(1)], \quad \mathbf{z}_4(j, k) = \text{col}[\widehat{\mathbf{x}}_4(j, k) \quad M_{14}(j, k) \quad e_4(j, k)],$$

а  $\xi_4(j, k)$  — ошибка, обусловленная заменой  $\mathbf{x}_4(j, k)$  на  $\widehat{\mathbf{x}}_4(j, k)$ . Для (8) типовая процедура МНК<sup>\*)</sup> [3] оценивания записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}_4(j) \cdot \widehat{\mathbf{c}}_4(j) = \mathbf{b}_4(j), \quad (9)$$

компоненты которой формируются согласно

$$\mathbf{F}_4(j) = \sum_{k \in K_4} \lambda_4(k) \cdot \mathbf{z}_4(j, k) \cdot \mathbf{z}_4(j, k)^T, \quad \mathbf{b}_4(j) = \sum_{k \in K_4} \lambda_4(k) \cdot \mathbf{z}_4(j, k) \cdot M_4(k)^T,$$

где  $\lambda_4(k) \geq 0$ ,  $\sum_{k \in K_4} \lambda_4(k) = 1$  — нормировочные коэффициенты, а  $K_4$  — множество номеров моментов времени замеров донных отложений.

На основании изложенного итеративная процедура оценивания параметров модели (3) записывается в виде инструкции:

<sup>\*)</sup> МНК — метод наименьших квадратов.

<u>Начало</u>	
1. $I_4 = \langle M_1(k) \quad \mathbf{v}_4(k) \quad k = \overline{1, N}; M_4(k), k \in K_4 \rangle$	— ввод исходных данных
2. $\mathbf{c}_4(1) = \text{col}[0 \quad \beta_4(1) \quad M_4(1,1)]$ , $\alpha_4(1)$	— установка начальных настроек
3. $j = 1$	— начало цикла
4. $z_4(j, k) = \text{col}[\hat{\mathbf{x}}_4(j, k) \quad M_{14}(j, k) \quad e_4(j, k)]$ , $k = \overline{1, N}$	— генерация регрессоров (5)–(7)
5. $\mathbf{c}_4(j+1) = \mathbf{F}_4(j)^{-1} \cdot \mathbf{b}_4(j)$	— шаг МНК оценивания (9)
6. $\alpha_4(j+1) = \alpha_4(j) - \delta\alpha_4(j+1)$	— коррекция фильтров (5), (7)
7. Если $(\ \mathbf{c}_4(j+1) - \mathbf{c}_4(j)\  > \xi_4)$ , <sup>*)</sup> то $(\delta\alpha_4(j+1) = 0, j := j+1)$ , на 4 иначе (продолжить)	— условный переход по анализу сходимости
8. $\hat{\alpha}_4 = \alpha_4(j+1)$ , $\hat{\beta}_4 = \beta_4(j+1)$ , $\hat{M}_4(1) = M_4(j+1, 1)$	— вывод результата оценивания (9)
9. $\alpha_4(j+1) = \alpha_4(j) - \delta\alpha_4(j+1)$	— вывод оценки процесса $M_4(k)$ (6)
<u>Конец</u>	

В инструкции  $\xi_4$  — малый параметр точности сходимости, в условиях которой выполняется, согласно (4), (6), отношение следствия

$$\left( \delta\alpha_4(j) \rightarrow 0 \right) \Rightarrow \left( \mathbf{c}_4(j) \rightarrow \mathbf{c}_4, \alpha_4(j) \rightarrow \alpha_4 \right) \Rightarrow \left( \hat{M}_4(j, k) \rightarrow M_4(k), \forall k = \overline{1, N} \right).$$

Анализ сходимости иллюстрируется примером идентификации модели (3) с параметрами из табл. при шаге дискретизации  $\Delta t_1 = 1$  час измерения загрязненности водотока и периоде наблюдений  $T = [138 \div 238]$  день.

#### Значения параметров гидрохимической модели

$\alpha_{41}$	$\alpha_{43} + \lambda_4$	$\beta_4$	$M_4(1)$
0,000002	0,00021	0,002	50,025

$K_4 = \{138 \ 158 \ 178 \ 198 \ 218 \ 238\}$  — индикаторное множество замеров донных отложений включает 6 точек с периодом в 20 дней (динамика загрязненности дна и водотока, восстановленная на основе принятых модельных положений, изображена на рис. 1).

<sup>\*)</sup>  $\|\mathbf{x}\|$  — длина вектора  $\mathbf{x}$  в евклидовой метрике [3].

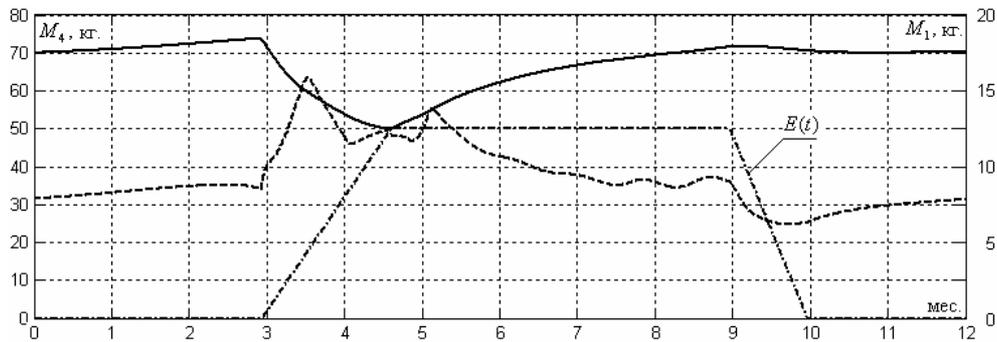


Рис. 1. Динамика загрязненности  $M_1$  и  $M_4$

Предложенный алгоритм идентификации имеет широкий диапазон сходимости результатов (ошибка по начальным приближениям варьируется от 70 до 40 %), что иллюстрируется графиком пошаговых среднеквадратических отклонений (рис. 2). Истинные значения коэффициентов в среднем определяются за четыре прохода алгоритма.

$$\Delta^2(k) = \|\alpha_4 - \alpha_4(j)\|^2 + (\beta_4 + \beta_4(j))^2 + (M_4(1) + M_4(j, 1))^2.$$

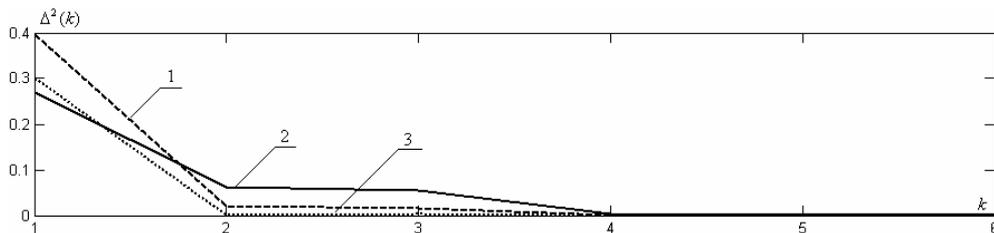


Рис. 2. Динамика изменения среднеквадратического отклонения:  
1 — ошибка 70 %, 2 — 50 %, 3 — 40 %

Идентификация параметров модели донных отложений позволяет упростить процесс нахождения коэффициентов модели «водная среда — берег». Тем не менее эта задача остается сложной в вычислительном плане как из-за необходимости определения большего количества коэффициентов, так и ввиду использования модели нелинейной регрессии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дружинин Н. И., Шишкин А. И. Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод суши. — Л.: Гидрометеиздат, 1989. — 391 с.
2. Пикиноров П. В., Шмелева Т. А. Моделирование нефтезагрязненности водотоков, расположенных на территории месторождений // Вестн. кибернетики. — Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2006. — № 5. — С. 10–15.
3. Фурасов В. Д. Задачи гарантированной идентификации. Дискретные системы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 150 с.

*P. V. Pikinerov, T. A. Shmeleva*

*IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF HYDROCHEMICAL MODEL WITH RESPECT  
FOR OIL POLLUTION OF WATERCOURSE' BOTTOM*

*The paper considers identification questions for parameters of bottom sediments' model, basing on different-in-frequency measurement scheme of river bottom and aqueous medium's condition.*