Г. П. Быстрай, В. Г. Черняк

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ БЫСТРО ПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Строятся уравнения гидродинамики, которые учитывают вязкоупругие свойства жидкости на временах, сопоставимых со временем релаксации напряжений, а в случае стационарных или медленно изменяющихся со временем процессов переходят в классические уравнения движения ньютоновских жидкостей. В частности, получены обобщенные уравнения Навье-Стокса, Рейнольдса, а также уравнения для пульсационных составляющих гидродинамических величин.

Введение

Как известно, классическое уравнение Навье-Стокса описывает движение ньютоновской жидкости, модуль сдвига которой равен нулю. Поэтому оно может быть использовано для моделирования только таких нестационарных движений вязкой жидкости, характерные времена которых значительно больше времени релаксации внутренних напряжений в жидкости. На временах, сравнимых по порядку величины со временем релаксации напряжений, кроме вязкостных проявляются и упругие свойства жидкости. Такие ситуации могут возникать, например, при кратковременном воздействии внешних сил на жидкость или при движениях жидкости в режиме развитой турбулентности, когда период мелкомасштабных пульсаций сопоставим со временем релаксации напряжений. Таким образом, классическое уравнение Навье-Стокса не может быть использовано для описания всего спектра частот пульсаций в турбулентном потоке. Во всяком случае, оно может вносить существенную погрешность при описании высокочастотных мелкомасштабных пульсаций турбулентного движения жидкости. Отсюда следует необходимость обобщения уравнений гидродинамики для быстро протекающих процессов.

Очевидно, что известные модели вязкоупругой жидкости, используемые в реологии, не приведут к решению поставленной задачи. Цель данной работы состоит в построении таких уравнений гидродинамики, которые учитывали бы вязкоупругие свойства жидкости на временах, сопоставимых с временем релаксации напряжений, а в случае стационарных или медленно изменяющихся со временем процессов переходили бы в классические уравнения движения ньютоновских жидкостей. В частности, в этой работе будут получены обобщенные уравнения Навье-Стокса, Рейнольдса, а также уравнения для пульсационных составляющих гидродинамических величин.

Обобщенное уравнение Навье-Стокса

Представим тензор напряжений жидкости в виде

$$P_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}\,, \tag{1}$$

где p — давление жидкости, σ_{ik} — бездивергентный тензор напряжений, который в общем случае не отождествляется с вязкими напряжениями. Тогда уравнение движения при отсутствии внешних сил в эйлеровых переменных запишется в виде [1]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,, \tag{2}$$

где v_i — проекция вектора скорости на координатную ось x_i, ρ — плотность жидкости.

Пусть τ — время релаксации напряжений в жидкости, т. е. время исчезновения сдвиговых напряжений после прекращения деформации. По порядку величины это время обычно мало по сравнению с характерным временем движения жидкости и велико по сравнению со средним временем молекулярного движения (среднее время локализации молекулы в некоторой точке жидкости или среднее время свободного пробега в газе). Учет особенностей движения жидкости на временах порядка τ не выходит за рамки гипотезы сплошности среды. Например, значение времени релаксации составляет для воды $\sim 1 \cdot 10^{-5}$ с [2, 3], а для воздуха $10^{-6} \div 10^{-7}$ с [4]. Для сравнения, характерные времена молекулярного движения при нормальных условиях составляют в жидкостях $\sim 10^{-11}$ с, а в газах $\sim 10^{-9}$ с. Следует иметь в виду, что максимальные значения частот типичного спектра турбулентных пульсаций составляют величину 10^5 Гц [5, 6], что соответствует по порядку величины времени релаксации напряжений в жидкости.

Предположим, что в движущейся жидкости имеют место пульсации гидродинамических переменных, например скорости, с некоторой частотой ω. Кроме того, на жидкость могут действовать периодические внешние силы. Если период пульсаций много больше времени релаксации напряжений, т. е. $\omega\tau \ll 1$, то движение жидкости описывается классическим уравнением Навье-Стокса. В противном случае, когда $\omega\tau \gg 1$, жидкость ведет себя как твердое тело. При любых значениях $\omega\tau$ бездивергентный тензор напряжений удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [7]:

$$\tau \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \sigma_{ik} = 2\eta \dot{\varepsilon}_{ik}, \quad \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \tag{3}$$

где η — коэффициент динамической вязкости жидкости, $\dot{\varepsilon}_{ik}$ — тензор скоростей деформаций. Можно показать [7], что из уравнения (3) следуют правильные результаты в обоих предельных случаях.

Продифференцировав уравнение (3) для напряжений по координатам x_k, получим

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \tau \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial t \partial x_k}. \tag{4}$$

Теперь уравнение движения (2) продифференцируем по времени

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + \frac{\partial v_k}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_k} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial t \partial x_k} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{5}$$

С учетом соотношений (4) и (5) уравнение движения (2) преобразовывается к следующему виду

$$\hat{T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\hat{T}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)+\nu\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)+$$
$$+\frac{\tau}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial v_s}{\partial x_s}+v_s\frac{\partial \rho}{\partial x_s}\right)\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},\ \hat{T}=1+\tau\frac{\partial}{\partial t}. \qquad (6)$$

Здесь $\nu=\eta/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости. При выводе (6) учтено уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho v_k\right).$$

Заметим, что уравнение движения (6) включает вторые производные от скорости движения жидкости по времени, которые пропорциональны времени релаксации τ. Можно ожидать, что учет этих членов будет определяющим при описании распространения малых возмущений в жидкости как волнового процесса с периодом, меньшим либо порядка τ. Кроме того, уравнение (6) открывает новые возможности в исследованиях гидродинамической устойчивости и построении моделей перехода к турбулентному движению. В предельном случае мгновенной релаксации напряжений $(\tau\to 0)$ уравнение (6) переходит в обычное уравнение Навье-Стокса.

В случае несжимаемой жидкости уравнение (6) существенно упрощается и принимает вид:

$$\hat{T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)=-\hat{T}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)+\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}. \qquad (7)$$

Если градиент давления задается внешними источниками и не изменяется со временем, то в правой части уравнения (7) следует положить $\hat{T}=1$.

Обобщенные уравнения Рейнольдса для несжимаемой жидкости

Воспользуемся традиционным методом описания турбулентных течений. Известно, что при турбулентном движении мгновенные гидродинамические величины есть нерегулярно осциллирующие функции времени. При изотермическом движении несжимаемой жидкости определяющими гидродинамическими переменными являются скорость и давление. Представим эти величины в любой момент времени в виде суммы их средних значений и малых пульсационных составляющих

$$v_i=\overline{v_i}+v_i',\qquad p=\overline{p}+p'. \qquad (8)$$

Усреднение гидродинамических величин проводится по промежутку времени t_0, большому по сравнению с периодом крупномасштабных пульсаций, но малому по сравнению с характерным временем изменения параметров осредненного движения

$$\overline{v_i}=\frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0}v_i dt,\qquad \overline{p}=\frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0}p\,dt. \qquad (9)$$

Заметим, что осредненное движение может быть и нестационарным.

Пусть f_1 и f_2 — произвольные случайные функции, мгновенные значения которых в любой фиксированной точке пространства в любой момент времени можно представить в виде суммы среднего значения и пульсационной составляющей

$$f_1 = \overline{f_1} + f_1', \qquad f_2 = \overline{f_2} + f_2'.$$

В гидродинамике приняты следующие правила усреднения. Среднее значение пульсационной составляющей равно нулю, $\overline{f'} = 0$. Среднее суммы равно сумме средних

$$\overline{f_1 + f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2}.$$

Средние значения произведений

$$\overline{\overline{f_1} \cdot f_2} = \overline{f_1} \cdot \overline{f_2}, \quad \overline{\overline{f_1} \cdot f_2'} = \overline{f_1} \cdot \overline{f_2'} = 0, \quad \overline{f_1 \cdot f_2} = \overline{f_1} \cdot \overline{f_2} + \overline{f_1' \cdot f_2'}.$$

Подставляя мгновенные скорости и давления (8) в уравнение движения (7) и усредняя его по вышеуказанным правилам, получим

$$\hat{T}\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_k}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}\right) = -\hat{T}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{v_i' v_k'}\right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{v_i}}{\partial x_k^2}. \tag{10}$$

Здесь $T_{ik} = -\rho\overline{v_i' v_k'}$ — тензор турбулентных напряжений (напряжения Рейнольдса).

Уравнение (10) включает вторую производную от осредненной скорости по времени, а также производную от тензора турбулентных напряжений по времени. Однако в типичной ситуации период крупномасштабных пульсаций велик в сравнении со временем релаксации напряжений $(t_0 >> \tau)$. В этом случае членами порядка τ в уравнении (10) следует пренебречь, и в результате получим известное уравнение Рейнольдса.

Более интересным представляется линеаризованное уравнение для пульсационной скорости, которое также следует из обобщенного уравнения Навье-Стокса (7) и соотношений (8)

$$\hat{T}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial t} + \overline{v_k}\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} + v_k'\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k}\right) = -\hat{T}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right) + \nu \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_k^2}. \tag{11}$$

При исследовании гидродинамической устойчивости обычно используют уравнение (11) при $\hat{T} = 1$ [1]. Но такое уравнение не описывает мелкомасштабные пульсации.

Учет членов порядка времени релаксации напряжений (τ) является принципиальным именно в диссипативном интервале частот.

Уравнение (11), включающее вторую производную от пульсационной составляющей скорости по времени, открывает новые возможности при исследовании возникновения турбулентности. В частности, позволяет строить модели турбулентного движения, основанные на концепции детерминированного хаоса [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 2001.

2. *Наймарк О. Б.* Неравновесные структурные переходы как механизм турбулентности // ПЖТФ. — 1997. — Т. 23, № 12. — С. 81–86.

3. *Ширяева С. О., Григорьев О. А.* О капиллярном движении вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью // ЖЭТФ. — 2000. — Т. 70, вып. 8. — С. 39–44.

4. *Быстрай Г. П., Студенок С. И.* Влияние вязкоупругих свойств жидкости и последействия на механизм возникновения развитой турбулентности // Наука и технологии. Избранные тр. Российской школы «К 70-летию Г. П. Вяткина». — М.: РАН, 2005. — С. 163–174.

5. *Чепмен Д. Р.* Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития. Драйденовская лекция // Ракетная техника и космонавтика. — 1980. — Т. 18, № 2. — С. 3–32.

6. *Хинце И. О.* Турбулентность. — М.: Физматгиз, 1963.

7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. — М., 2001.

8. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988.

G. P. Bystrai, V. G. Chernyak

GENERALIZATION OF HYDRODYNAMIC EQUATIONS FOR RAPIDLY PASSING PROCESSES

Hydrodynamic equations are set up considering liquid viscoelasitcity depending on time, compared with stresses relaxation time. In case of stationary or slowly changeable in time processes, the equations are transformed into classical equations of Newtonian liquids flow. Particularly, there are obtained the generalized equations of Navie-Stocks, Reynolds, and also the equations for pulsating component of hydraulic values.