

И. Г. Соловьев, А. В. Васькевич

АНАЛИЗ ТЕПЛОДИНАМИКИ МЕРЗЛОГО ГРУНТА МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Рассмотрен способ моделирования распределения температур в мерзлых грунтах при помощи метода гармонической линеаризации. Приведены результаты численного анализа.

В основе моделирования теплодинамики массивов мерзлых грунтов (ММГ) лежит классическая задача Стефана [1], имитирующая движение границ раздела фаз. Последующее развитие вопросов моделирования связано с уточнением классической схемы на основе детализации механизмов фазовых переходов, учитывающих объемное содержание остаточной незамерзшей влаги [2, 3]. Наличие солей и иных компонентов водных растворов переводят точку фазовых превращений в температурный интервал, параметры которого, как и теплофизические параметры ММГ, эволюционируют вследствие миграции влаги, солей [4], температурных и механических возмущений [5]. Специфика задач типа Стефана потребовала развития адекватных вычислительных процедур [6, 7], обеспечивающих надлежащие условия точности и экономичности счета.

Совершенствование криогенных технологий строительства и эксплуатации промышленных и гражданских сооружений заставляет искать новые подходы к описанию теплофизических процессов в массивах мерзлых грунтов, ориентированные на применение развитых методов теории управления с последующей постановкой и решением задачи оптимальной автоматической стабилизации мерзлотных условий грунтов.

Задача эта особенно актуальна для реализации стратегий искусственного замораживания при строительстве тоннелей и иных подземных путепроводов.

В статье изучается техника приближенного анализа одномерной задачи типа Стефана [1] на основе классического в теории автоматического регулирования [8] метода гармонической линеаризации [9]. В отличие от типового спектрального анализа метод гармонической линеаризации позволяет явно учитывать нелинейные особенности решений, вносимые диссипацией энергии фазовых переходов.

Конечномерная аппроксимация термодинамики ММГ (одномерная задача типа Стефана [10]) может быть представлена системой уравнений:

$$\begin{cases} \Delta H_1 \frac{d}{dt} c_1(\Theta_1) = \lambda_0(\Theta_0) - 2\lambda_1(\Theta_1) + \lambda_2(\Theta_2), \\ \Delta H_2 \frac{d}{dt} c_2(\Theta_2) = \lambda_1(\Theta_1) - 2\lambda_2(\Theta_2) + \lambda_3(\Theta_3), \\ \dots \dots \dots \\ \Delta H_n \frac{d}{dt} c_n(\Theta_n) = \lambda_{n-1}(\Theta_{n-1}) - 2\lambda_n(\Theta_n) + \lambda_{n+1}(\Theta_{n+1}), \end{cases} \quad (1)$$

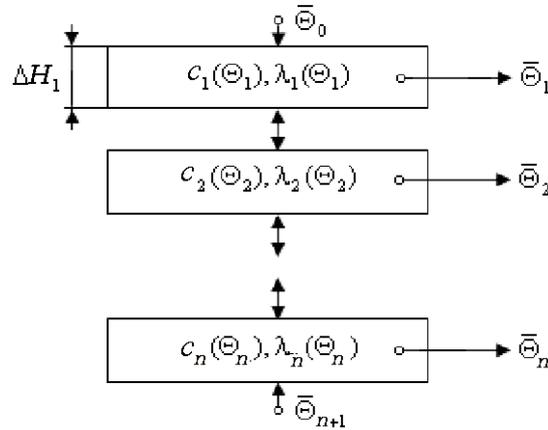


Рис. 1. Структурная схема конечномерной модели ММГ

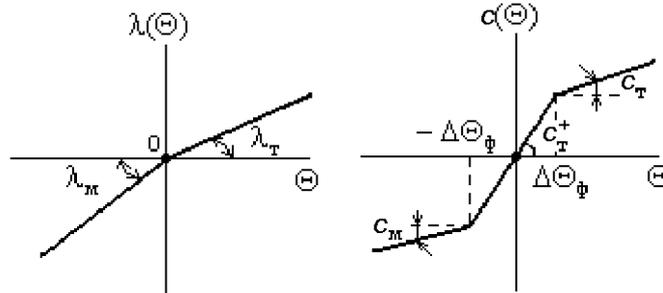


Рис. 2. Типовые графики функций теплопередачи и теплоемкости

где, согласно рис. 1, смещенный $\Theta_i = \bar{\Theta}_i - \Theta_\phi$ относительно точки фазового перехода Θ_ϕ вектор состояния температур ММГ по вертикали $\Theta = \text{col}[\Theta_1 \dots \Theta_n]$; ΔH_i — толщина i -го слоя в интервале $[H_{i-1}, H_{i-1} + \Delta H_i]$, $H_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta H_j$; $(\Theta_\phi - \Delta\Theta_\phi, \Theta_\phi + \Delta\Theta_\phi)$ — температурный интервал фазовых превращений; $\lambda_i(\Theta_i)$, $c_i(\Theta_i)$ — функции теплопередачи и теплоемкости ММГ в условиях фазовых переходов (рис. 2):

$$\lambda_i(\Theta) = \begin{cases} \lambda_{mi}\Theta, & \text{при } \Theta \leq 0, \\ \lambda_{ti}\Theta, & \text{при } \Theta \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$c_i(\Theta) = \begin{cases} c_{mi}\Theta - \Delta\Theta_{ci}, & \text{при } \Theta \leq -\Delta\Theta_\phi, \\ c_{mi}^+\Theta, & \text{при } \Theta \in (-\Delta\Theta_\phi, 0], \\ c_{ti}^+\Theta, & \text{при } \Theta \in (0, \Delta\Theta_\phi], \\ c_{ti}\Theta + \Delta\Theta_{ci}, & \text{при } \Theta > \Delta\Theta_\phi. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь параметры теплопередачи и теплоемкости i -го слоя вычисляются отдельно для мерзлого «м» и талого «т» состояния по формулам:

$$\lambda_{mi} = (1 - W_i)\lambda_{ti} + W_i\lambda_n, \quad \lambda_{ti} = (1 - W_i)\lambda_{ti} + W_i\lambda_b,$$

$$c_{mi} = (1 - W_i)c_{ti} + W_i c_n, \quad c_{ti} = (1 - W_i)c_{ti} + W_i c_b,$$

где λ_{ti} , c_{ti} , λ_b , c_b , λ_n , c_n — теплофизические параметры компонент ММГ, а именно: грунта «г», воды «в» и льда «л»; $W_i \in (0, 1)$ — объемная влажность массива грунта для i -го слоя. Условная теплоемкость фазовых превращений кратно возрастает за счет энергии реакций на формирование и разрушение кристаллической решетки льда, поэтому

$$c_{mi}^+ = c_{mi} + W_i Q_\phi, \quad c_{ti}^+ = c_{ti} + W_i Q_\phi,$$

где Q_ϕ — удельная теплота фазового перехода. В рамках введенных обозначений имеем $\Delta\Theta_{ci} = W_i Q_\phi \Delta\Theta_\phi$. Краевые условия, приведенные к точке Θ_ϕ , задаются выражениями:

$$\Theta_0 = \overline{\Theta_0} - \Theta_\phi = q_0 + b_0 \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi / T, \quad T = 365 \text{ дней},$$

$$\Theta_{n+1} = \overline{\Theta_{n+1}} - \Theta_\phi = q_{n+1}.$$

Решение задачи (1) ищется в приближенном виде

$$\Theta_i(t) = q_i + A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = q_i + b_i \sin \omega t + a_i \cos \omega t,$$

$$b_i = A_i \cos \varphi_i, \quad a_i = A_i \sin \varphi_i.$$

Гармоническая линеаризация нелинейностей (2), (3) дает приближенные равенства

$$\lambda_i(\Theta_i(t)) \approx q_{\lambda i} + Q_{\lambda i}(b_i \sin \omega t + a_i \cos \omega t),$$

$$c_i(\Theta_i(t)) \approx q_{ci} + Q_{ci}(b_i \sin \omega t + a_i \cos \omega t),$$

где параметры введенного разложения ряда Фурье [9] вычисляются по выражениям

$$q_{\lambda i}(q_i, A_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_i(q_i + A_i \sin \psi) d\psi,$$

$$Q_{\lambda i}(q_i, A_i) = \frac{1}{\pi A_i} \int_0^{2\pi} \lambda_i(q_i + A_i \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$Q_{ci}(q_i, A_i) = \frac{1}{\pi A_i} \int_0^{2\pi} c_i(q_i + A_i \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

с $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$. Подставив (5) в систему (1), с учетом (6) приходим к искомому гармоническому балансу

$$\begin{cases} q_{\lambda, i-1} - 2q_{\lambda i} + q_{\lambda, i+1} = 0, \\ Q_{\lambda, i-1} b_{i-1} - 2Q_{\lambda i} b_i + Q_{\lambda, i+1} b_{i+1} = -Q_{Hi} a_i, & Q_{Hi} = \omega \Delta H_i Q_{ci}, \quad i = \overline{1, n}, \\ Q_{\lambda, i-1} a_{i-1} - 2Q_{\lambda i} a_i + Q_{\lambda, i+1} a_{i+1} = Q_{Hi} b_i, \end{cases} \quad (8)$$

с краевыми значениями

$$\lambda_0(\Theta_0) = \lambda_0(q_0 + b_0 \sin \omega t),$$

$$\lambda_{n+1}(\Theta_{n+1}) = \lambda_{n+1} q_{n+1}.$$

Перейдя к векторно-матричным обозначениям, с учетом (7) получаем

$$\begin{cases} S_0 \mathbf{q}_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{A}) = E_0 \mathbf{q}_0, \\ Q_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{A}) \mathbf{b} - Q_H(\mathbf{q}, \mathbf{A}) \mathbf{a} = E_0 \mathbf{b}_0, \\ Q_H(\mathbf{q}, \mathbf{A}) \mathbf{b} - Q_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{A}) \mathbf{a} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{q}_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{A}) = \text{col} [q_{\lambda,1} \dots q_{\lambda,n}]$, $\mathbf{b} = \text{col} [b_1 \dots b_n]$, $\mathbf{a} = \text{col} [a_1 \dots a_n]$, а n -мерные матрицы системы и векторы краевых условий имеют вид:

$$Q_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{A}) = \begin{array}{|ccc|} \hline 2Q_{\lambda,1} & -Q_{\lambda,2} & \text{O} \\ -Q_{\lambda,1} & 2Q_{\lambda,2} & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & 2Q_{\lambda,n} \\ \hline \end{array} \quad Q_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{A}) = \omega \begin{array}{|ccc|} \hline \Delta H_1 Q_{c1} & \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & \Delta H_2 Q_{c2} & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & \Delta H_n Q_{cn} \\ \hline \end{array}$$

$$S_0 = \begin{array}{|ccc|} \hline 2 & -1 & \text{O} \\ -1 & 2 & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} & 2 \\ \hline \end{array} \quad E_0 = \begin{array}{|cc|} \hline \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{array}{|c|} \hline q_0 \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{b}_0 = \begin{array}{|c|} \hline b_0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Итеративная процедура решения системы (9) иллюстрируется блок-схемой алгоритма, представленного на рис. 3, где $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ — векторы начального приближения искомого решения; $\mathbf{q}_\lambda^{-1}(\cdot)$ — алгоритм вычисления вектора постоянного смещения \mathbf{q} , получаемый из первого блока системы (9); ε — параметр точности приближения. Под векторными записями $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$, $\varphi = \arctg \mathbf{a}/\mathbf{b}$ понимаются их покомпонентные аналоги, $\|\mathbf{c}\|$ — обозначение евклидовой нормы вектора \mathbf{c} ^{*)}.

Алгоритм вычисления коэффициентов гармонической линеаризации $Q_\lambda(q, A)$ и смещения $q_\lambda(q, A)$, согласно (2), (7), удается выписать аналитически в виде:

^{*)} Если $\mathbf{c} = \text{col} [c_1 \dots c_n]$, то $\|\mathbf{c}\|^2 = c_1^2 + \dots + c_n^2$.

для $q \leq 0$

$$q_\lambda(q, A) = \lambda_m q + 1_+(A - |q|) \cdot \frac{\lambda_\tau - \lambda_m}{\pi} \left(q \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) + A \sqrt{1 - (q/A)^2} \right),$$

$$Q_\lambda(q, A) = \lambda_m + 1_+(A - |q|) \cdot \frac{\lambda_\tau - \lambda_m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \frac{q}{A} \sqrt{1 - (q/A)^2} \right),$$

$$\varphi_1 = \arcsin(-q/A),$$

для $q > 0$

$$q_\lambda(q, A) = \lambda_\tau q + 1_+(A - |q|) \cdot \frac{\lambda_m - \lambda_\tau}{\pi} \left(q \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3 \right) - A \sqrt{1 - (q/A)^2} \right),$$

$$Q_\lambda(q, A) = \lambda_\tau + 1_+(A - |q|) \cdot \frac{\lambda_m - \lambda_\tau}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3 - \frac{q}{A} \sqrt{1 - (q/A)^2} \right),$$

$$\varphi_3 = \arcsin(q/A),$$

где

$$1_+(A - |q|) = \begin{cases} 1, & \text{при } A - |q| > 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

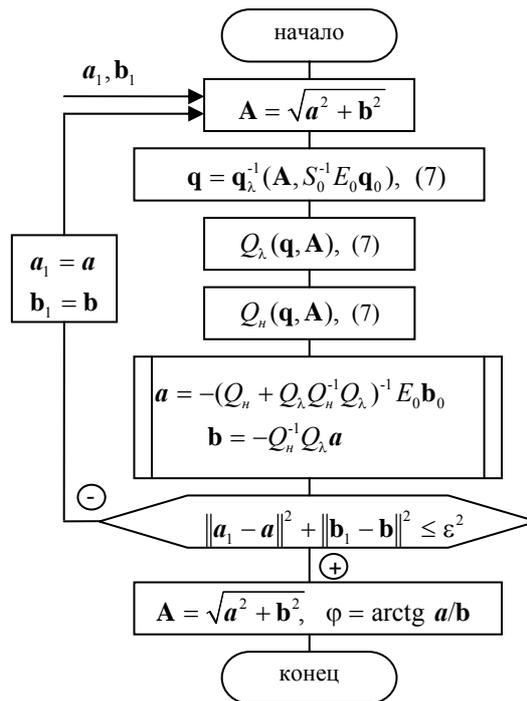


Рис. 3. Блок-схема алгоритма решения системы (9)

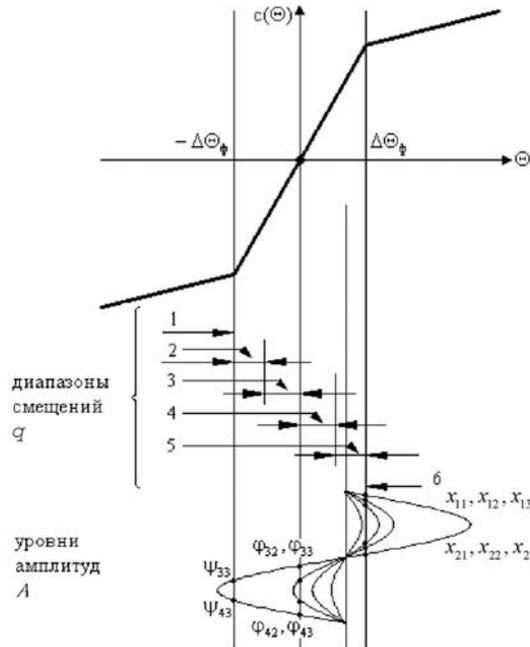


Рис. 4. Особенности гармонического анализа с разными уровнями смещения и амплитуд

Алгоритм вычисления коэффициента линеаризации $Q_c(q, A)$ имеет более сложную логику построения, связанную с шестью типовыми диапазонами смещений q и четырьмя уровнями амплитуды A , например как на рис. 4.

Алгоритм расчета Q_c для пятого диапазона смещения $q \in \left[\frac{1}{2}\Delta\Theta_\phi, \Delta\Theta_\phi \right]$ (см. рис. 4) иллюстрируется таблицей, где

$$Q_c(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{c}{\pi} \left[0,5\pi - \alpha_1 + \left(q + \{\Delta\} \pm 2 \frac{\Delta\Theta_c}{c_m} \right) \frac{1}{A} \sqrt{1 - (\{\Delta\} - q)^2 / A^2} \right],$$

$$Q_c(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{c}{\pi} \left[0,5\pi - \alpha_3 - \left(q + \{\Delta\} \pm 2 \frac{\Delta\Theta_c}{c_m} \right) \frac{1}{A} \sqrt{1 - (\{\Delta\} - q)^2 / A^2} \right],$$

а $\{\Delta\} = \{-\Delta\Theta_\phi, 0, \Delta\Theta_\phi\}$.

Алгоритм расчета Q_c

$A < -q + \Delta\Theta_\phi$	$Q_c = Q_{ct}^+(0, 2\pi) = c_t^+$,
$-q + \Delta\Theta_\phi \leq A < q$	$Q_c = Q_{ct}^+(0, 2\pi) - Q_{ct}^+(\chi_{11}, \chi_{21}) + Q_{ct}^+(\chi_{11}, \chi_{21})$,
$q \leq A \leq q + \Delta\Theta_\phi$	$Q_c = Q_{ct}^+(0, 2\pi) - Q_{ct}^+(\chi_{12}, \chi_{22}) + Q_{ct}^+(\chi_{12}, \chi_{22}) -$ $- Q_{ct}^+(\varphi_{32}, \varphi_{42}) + Q_{cm}^+(\varphi_{32}, \varphi_{42})$,
$q + \Delta\Theta_\phi \leq A$	$Q_c = Q_{ct}^+(0, 2\pi) - Q_{ct}^+(\chi_{13}, \chi_{23}) + Q_{ct}^+(\chi_{13}, \chi_{23}) - Q_{ct}^+(\varphi_{33}, \varphi_{43}) +$ $+ Q_{cm}^+(\varphi_{33}, \varphi_{43}) - Q_{cm}^+(\psi_{33}, \psi_{43}) + Q_{cm}^+(\psi_{33}, \psi_{43})$

На рис. 5 приведен график коэффициента гармонической линейзации для симметричной нелинейности (см. рис. 2) с параметрами $c_m = c_T = 1$, $c_m^+ = c_T^+ = 10$, $\Delta\Theta_\phi = 1$.

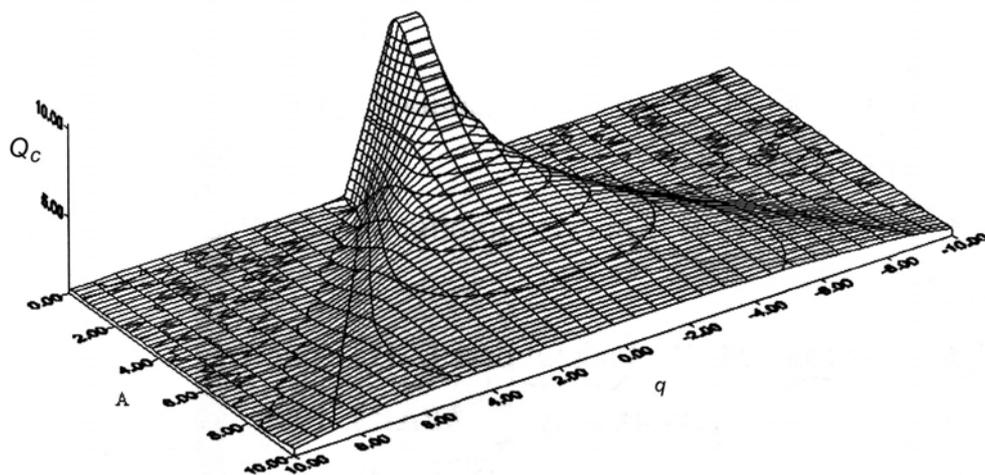


Рис. 5. Коэффициент гармонической линейзации Q_c

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдман Г. М. Методы расчета температурного режима мерзлых грунтов. — М.: Наука, 1973. — 254 с.
2. Колесников А. Г. К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 32, № 6. — С. 889–891.
3. Ентов В. М., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Образование двухфазных зон при промерзании пористой среды. — М., 1986. — 56 с. — (Предп./ ИПМ АН СССР, № 269).
4. Пермяков П. П., Амосов А. П. Математическое моделирование техногенного загрязнения в криолитозоне. — Новосибирск: Наука, 2003. — 224 с.
5. Изаков В. Ю., Самохин А. В., Петров Е. Е., Слепцов В. И. Вопросы устойчивости обнажений многолетнемерзлых грунтовых пород. — Новосибирск: Наука, 1994. — 165 с.
6. Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 616 с.
8. Алексеев А. А., Имаев Д. Х., Кузмин Н. Н., Яковлев В. Б. Теория управления: Учеб. — СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 1999. — 435 с.
9. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1988. — 256 с.
10. Соловьев И. Г., Васкевич А. В. Модель теплодинамики грунтов в пространстве состояний // Вестн. кибернетики. — Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2005. — № 4. — С. 53–59.

I. G. Soloviev, A. V. Vaskevich

ANALYSIS OF FROZEN GROUND HEATDYNAMICS BY THE METHOD OF HARMONIC LINEARIZATION

It is examined the way of modeling temperature distributions in frozen grounds using the method of harmonic linearization. The results of numeric analysis are given.