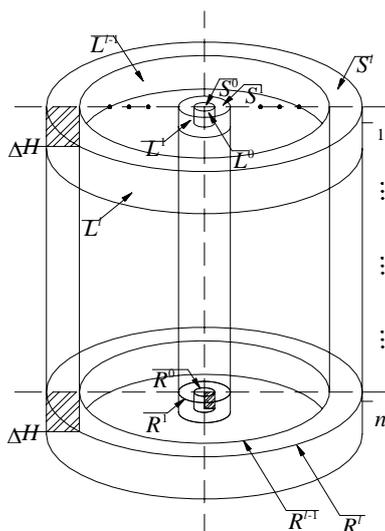


И. Г. Соловьев, А. Е. Панышин

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ТЕПЛОДИНАМИКИ МЕРЗЛОГО ГРУНТА НА ОСНОВЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

*Рассмотрена алгебраическая схема анализа задачи Стефана на основе метода гармонической линеаризации.*

Теория математического анализа температурных процессов в массивах мерзлых грунтов (ММГ) основывается на классической задаче Стефана [1, 2], которая существенно эволюционировала вследствие роста актуальности прикладных вопросов устойчивости мерзлых грунтовых оснований, возмущенных техногенными сооружениями [3, 4]. Развитие криогенных технических средств [5, 6] и технологии управления позволяет подходить к анализу вопросов автоматизированного регулирования температурного состояния мерзлотных оснований с использованием современных алгебраических методов управления, что особенно актуально при оценке и авторегулировании степени взаимовлияния тепловых источников возмущений, расположенных в пределах одного мерзлотного основания.

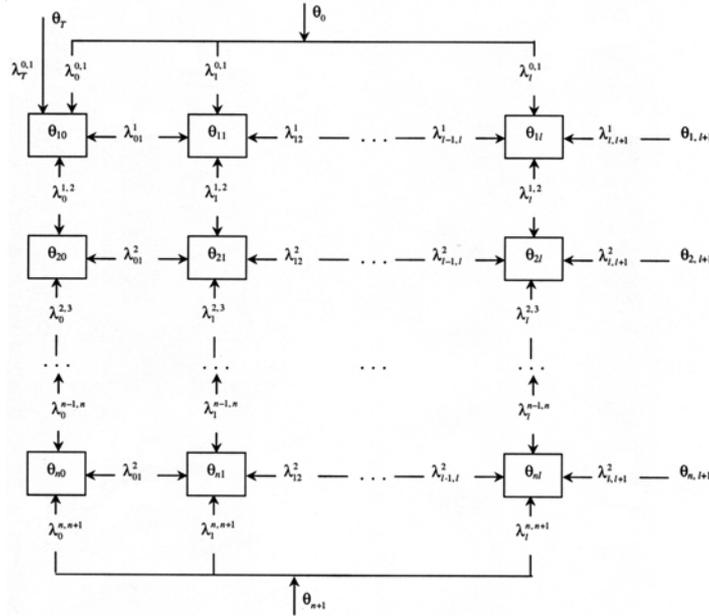


**Рис. 1.** Цилиндрическая  $n$ -слойная схема ММГ, возмущенного вертикальной сваем радиуса  $R_0$ :

$\Delta H$  — интервал (толщина) слоевого деления;  $R_i, i = \overline{0, l}$  — радиусы кольцевого деления ММГ;  $S_i, L_i$  — торцевая и радиальные площади теплопередач

Рассмотренная в [7] техника расчета термодинамики мерзлых массивов методом гармонической линеаризации позволяет развивать алгебраические подходы к анализу тепловых процессов возмущенных грунтов. В статье изложена методика матричного квазилинейного алгебраического анализа двумерной задачи типа Стефана [1, 2] для ММГ, возмущенного вертикальной свайной конструкцией. Пространственная  $n$ -слойная цилиндрическая схема ММГ (рис. 1), с площадными параметрами теплопередач послойно-вертикальной:  $S_i = \pi(R_i^2 - R_{i-1}^2), i = \overline{0, l}$ ,

( $R_{-1} \equiv 0$ ) — и радиальной:  $L_j = 2\pi R_j \cdot \Delta H$ ,  $j = \overline{1, l}$ , дает конечномерную структурную схему модели массива, как на рис. 2.



**Рис. 2.** Конечномерная схема радиально симметричной структуры ММГ:

$\theta_{ij}(t)$  — средняя температура  $j$ -го кольцевого элемента в  $i$ -м слое;  $\theta_0(t)$ ,  $\theta_{n+1}(t)$ ,  $\theta_{i, i+1}(t)$  — краевые графики температур;  $\theta_n(t)$  — послойное распределение температур свай;  $\lambda_{i, i+1}^j$ ,  $\lambda_j^{i, i+1}$  — коэффициенты теплопередач в горизонтальном и вертикальном направлениях

Каждый элемент послойно-цилиндрической структуры характеризуется зонально осредненной температурой массива —  $\theta_{ij}(t)$ , центрированной относительно точки фазового перехода, и теплофизическими характеристиками:  $c_{ij}(\theta_{ij})$  — теплоемкостью и  $\lambda_{ij}(\theta_{ij})$  — теплопроводностью, которые в условиях фазовых переходов являются нелинейными функциями, как в [7]. Введенные на рис. 2 коэффициенты теплопередачи вычисляются по выражениям

$$\lambda_{i, i+1}^j = \frac{1}{2} L_j (\lambda_{j, i} + \lambda_{j, i+1}), \quad \lambda_j^{i, i+1} = \frac{1}{2} S_j (\lambda_{ij} + \lambda_{i+1, j}), \quad (1)$$

где для параметров  $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ij}(\theta_{ij})/\theta_{ij}$ , в силу гармонической линеаризации [8], принято:  $\lambda_{ij} = Q_{\lambda_{ij}}$ .

На основании рис. 2 и введенных обозначений термодинамика ММГ рассматриваемой структуры может быть описана системой уравнений вида

$$\begin{cases} V_0 \frac{d}{dt} c_0(\theta_0) = -\Lambda_0 \theta_0 + \Lambda_{0,1} \theta_1 + E_0 \theta_n + E_T \theta_T, \\ V_1 \frac{d}{dt} c_1(\theta_1) = \Lambda_{0,1} \theta_0 - \Lambda_1 \theta_1 + \Lambda_{1,2} \theta_2 + E_1 \theta_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ V_l \frac{d}{dt} c_l(\theta_l) = \Lambda_{l-1, l} \theta_{l-1} - \Lambda_l \theta_l + \Lambda_{l, l+1} \theta_{l+1} + E_l \theta_n, \end{cases} \quad (2)$$

где переменные состояния  $(l+1) \times n$ -мерной системы объединены в блоки:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \text{col}[\theta_{10} \theta_{20} \dots \theta_{n0}], \dots, \boldsymbol{\theta}_j = \text{col}[\theta_{1j} \theta_{2j} \dots \theta_{nj}], \quad j = \overline{1, l},$$

краевые условия также объединены в векторы внешних воздействий:

$$\boldsymbol{\theta}_\Pi = \text{col}[\theta_0 \theta_{n+1}], \quad \boldsymbol{\theta}_{l+1} = \text{col}[\theta_{1(l+1)} \dots \theta_{n(l+1)}],$$

$\theta_\tau$  — тепловое возмущение «верха» сваи, обусловленное тепловыделением смонтированной конструкции,  $V_i = \Delta H \cdot \text{diag}\{S_0 S_1 \dots S_i\}$  — матрица объемов цилиндрических ( $i = 0$ ) и кольцевых ( $i = \overline{1, l}$ ) элементов системы.

Матрицы теплопередач, например, для  $i$ -го цилиндра схемы ММГ ( $i$ -е уравнение системы (2)) имеют вид:

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i^{0,1} + \lambda_i^{1,2} + \lambda_{i-1,i}^1 + \lambda_{i,i+1}^1 & -\lambda_i^{1,2} & \dots & 0 \\ -\lambda_i^{1,2} & \lambda_i^{1,2} + \lambda_i^{2,3} + \lambda_{i-1,i}^2 + \lambda_{i,i+1}^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^{n-1,n} + \lambda_i^{n,n+1} + \lambda_{i-1,i}^n + \lambda_{i,i+1}^n \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \lambda_{i-1,i}^1 & & & 0 \\ & \lambda_{i-1,i}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i-1,i}^n \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \lambda_{i,i+1}^1 & & & 0 \\ & \lambda_{i,i+1}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{i,i+1}^n \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} \lambda_i^{0,1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_i^{n,n+1} \end{bmatrix}.$$

Краевая динамика вертикального распределения температур для внешней  $l+1$  окаймляющей зоны принимается эталонной температурой невозмущенного грунта, что соответствует системе уравнений

$$V_{l+1} \frac{d}{dt} c_{l+1}(\boldsymbol{\theta}_{l+1}) = -\Lambda_{l+1} \boldsymbol{\theta}_{l+1} + E_{l+1} \boldsymbol{\theta}_\Pi, \quad (3)$$

где  $V_{l+1}$  — диагональная матрица послойных объемов окаймляющего цилиндра.

Пусть крайевые температуры «верха» и «низа» системы назначаются соотношениями

$$\boldsymbol{\theta}_\Pi(t) = \mathbf{q}_\Pi + \mathbf{b}_\Pi \sin \omega t, \quad \theta_\tau(t) = \theta_\tau - \text{const}, \quad \mathbf{q}_\Pi = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\Pi = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

тогда приближенное решение системы (2), (3) будем искать в виде ряда Фурье, ограничиваясь первыми двумя членами разложения:

$$\boldsymbol{\theta}_i(t) \approx \mathbf{q}_i + \mathbf{a}_i \cos \omega t + \mathbf{b}_i \sin \omega t, \quad i = \overline{0, l+1}. \quad (5)$$

По схеме гармонической линеаризации [7, 8] имеем

$$c_i(\boldsymbol{\theta}_i(t)) \approx \mathbf{q}_{Ci} + Q_{Ci}(\mathbf{a}_i \cos \omega t + \mathbf{b}_i \sin \omega t), \quad (6)$$

где  $Q_{Ci}$  — диагональная матрица коэффициентов гармонического разложения нелинейности  $c_{ij}(\theta_{ij}(t))$ .

Заметим, что исходные составляющие сумм элементов матриц  $\Lambda_i$ ,  $\Lambda_{i, i+1}$ ,  $E_i$ , согласно (1), также определяются как коэффициенты  $\lambda_{ij} = Q_{\lambda_{ij}}$  [8] ряда Фурье.

Подставив (4)–(6) в систему уравнений (2) и приведя подобные при постоянном смещении  $\mathbf{q}_i$ , а также при функциях  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , приходим к алгебраическим соотношениям относительно параметров  $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \rangle$   $i = 0, l+1$  искомого решения (5) системы (1).

Для постоянного смещения

$$\begin{cases} \Lambda_0 \mathbf{q}_0 - \Lambda_{0,1} \mathbf{q}_1 = E_0 \mathbf{q}_n + E_T \mathbf{q}_T, \\ -\Lambda_{1,0} \mathbf{q}_0 + \Lambda_1 \mathbf{q}_1 - \Lambda_{1,2} \mathbf{q}_2 = E_1 \mathbf{q}_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ -\Lambda_{l-1,l} \mathbf{q}_{l-1} + \Lambda_l \mathbf{q}_l - \Lambda_{l,l+1} \mathbf{q}_{l+1} = E_l \mathbf{q}_n. \end{cases} \quad (7)$$

Для амплитуд и фаз ( $A_{ij} = \sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}$ ,  $\varphi_{ij} = \arctg a_{ij} / b_{ij}$ )

$$\begin{cases} M_0 \mathbf{e}_0 - M_{0,1} \mathbf{e}_1 = H_0 \mathbf{b}_n, \\ -M_{0,1} \mathbf{e}_0 + M_1 \mathbf{e}_1 - M_{1,2} \mathbf{e}_2 = H_1 \mathbf{b}_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ -M_{l-1,l} \mathbf{e}_{l-1} + M_l \mathbf{e}_l - M_{l,l+1} \mathbf{e}_{l+1} = H_l \mathbf{b}_n, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ \mathbf{a}_i \end{bmatrix}$ ,  $H_i = \begin{bmatrix} E_i \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $M_i = \begin{bmatrix} \Lambda_i & -T_i \\ T_i & \Lambda_i \end{bmatrix}$ ,  $M_{i, i+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{i, i+1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{i, i+1} \end{bmatrix}$ ,  $T_i = \omega V_i Q_{Ci}$ ,

$T_0 = \omega V_0 C_0$ ,  $C_0 = c_0 \text{diag} \left\{ \underbrace{11 \dots 1}_n \right\}$ ,  $c_0$  — удельная теплоемкость материала сваи.

Условия устойчивости свайного основания устанавливаются относительно диапазона послыонных вариаций температур первого кольца, что определяется парой  $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{e}_1 \rangle$ . С использованием ленточной структуры матриц систем (7), (8) искомое решение для первого и нулевого цилиндра выписывается в явном виде.

Утверждение. В условиях (7), (8) справедливы равенства

$$\begin{cases} \mathbf{q}_0 = B(0) \mathbf{q}_n + B_T \mathbf{q}_T + P(0) \mathbf{q}_{l+1}, & \mathbf{q}_1 = B(1) \mathbf{q}_n + L(1) \mathbf{q}_0 + P(1) \mathbf{q}_{l+1}, \\ \mathbf{e}_0 = D(0) \mathbf{b}_n + G(0) \mathbf{e}_{l+1}, & \mathbf{e}_1 = D(1) \mathbf{b}_n + N(1) \mathbf{e}_0 + G(1) \mathbf{e}_{l+1}, \end{cases} \quad (9)$$

где матрицы  $B(\cdot)$ ,  $L(\cdot)$ ,  $P(\cdot)$ ,  $D(\cdot)$ ,  $N(\cdot)$ ,  $G(\cdot)$  вычисляются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} (\Lambda_i - \Lambda_{i, i+1} L(i+1)) B(i) &= E_i + \Lambda_{i, i+1} B(i+1), \\ (\Lambda_i - \Lambda_{i, i+1} L(i+1)) L(i) &= \Lambda_{i-1, i}, \\ (\Lambda_i - \Lambda_{i, i+1} L(i+1)) P(i) &= \Lambda_{i, i+1} P(i+1), \\ (M_i - M_{i, i+1} N(i+1)) D(i) &= H_i + M_{i, i+1} D(i+1), \\ (M_i - M_{i, i+1} N(i+1)) N(i) &= M_{i-1, i}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$(M_i - M_{i,i+1}N(i+1))G(i) = M_{i,i+1}G(i+1),$$

$$B_l = (\Lambda_0 - \Lambda_{0,1}L(1))^{-1}E_l,$$

по нисходящему индексу  $i \in \{l-1, l-2, \dots, 1, 0\}$ , из начальных значений:

$$B(l) = \Lambda_l^{-1}E_l, \quad L(l) = \Lambda_l^{-1}\Lambda_{l-1,l}, \quad P(l) = \Lambda_l^{-1}\Lambda_{l,l+1},$$

$$D(l) = M_l^{-1}H_l, \quad N(l) = M_l^{-1}M_{l-1,l}, \quad G(l) = M_l^{-1}M_{l,l+1}. \quad (11)$$

Доказательство. Учитывая схожесть структур систем (7) и (8), доказательство приводим для системы (7).

Из последнего уравнения системы в силу (11) имеем:

$$q_i = B(l)q_{\Pi} + L(l)q_{i-1} + P(l)q_{i+1}.$$

Пусть выполнено

$$q_{i+1} = B(i+1)q_{\Pi} + L(i+1)q_i + P(i+1)q_{i+1}, \quad (12)$$

тогда для  $q_i$  в силу (7) справедливо равенство

$$\Lambda_i q_i = \Lambda_{i-1,i} q_{i-1} + \Lambda_{i,i+1} q_i + E_i q_{\Pi}.$$

После подстановки (12) и приведения подобных получаем

$$(\Lambda_i - \Lambda_{i,i+1}L(i+1))q_i = (E_i + \Lambda_{i,i+1}B(i+1))q_{\Pi} + \Lambda_{i-1,i}q_{i-1} + \Lambda_{i,i+1}P(i+1)q_{i+1}.$$

Отсюда

$$q_i = (\Lambda_i - \Lambda_{i,i+1}L(i+1))^{-1}((E_i + \Lambda_{i,i+1}B(i+1))q_{\Pi} + \Lambda_{i-1,i}q_{i-1} + \Lambda_{i,i+1}P(i+1)q_{i+1}),$$

что соответствует определению матриц  $B(i)$ ,  $L(i)$ ,  $P(i)$  (10), а следовательно, и выражениям (9) для  $i = 0$  и  $i = 1$ .

Заметим, что в условиях (3) для пары  $\langle q_{i+1}, e_{i+1} \rangle$  справедливы равенства

$$q_{i+1} = B(l+1)q_{\Pi} = \Lambda_{i+1}^{-1}E_{i+1}q_{\Pi}, \quad e_{i+1} = D(l+1)b_{\Pi} = M_{i+1}^{-1}H_{i+1}b_{\Pi}. \quad (13)$$

Полученные линейные решающие правила (9), (10) скрывают нелинейную природу задачи, связанную с зависимостью параметров  $\Lambda_i$ ,  $M_i$  систем (7) и (8) от значений  $q_i$ ,  $e_i$  в схеме гармонического баланса. Поэтому реально решение задачи анализа по соотношениям (9) и (10) осуществляется методом последовательных приближений с пошаговым уточнением параметров  $\Lambda_i$ ,  $M_i$  по результатам решений  $q_i$ ,  $e_i$  (рис. 3 в [1]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Э. Д. Общая геокриология. — М.: Недра, 1990. — 559 с.
2. Горбылев М. И., Красс М. С., Соловьев Б. С. Искусственное замораживание грунтов при освоении месторождений нефти и газа Западной Сибири // Задачи механики природных процессов / Под ред. С. С. Григоряна, М. С. Красс. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — С. 64–70.
3. Павлов А. В. Расчет и регулирование мерзлотного режима почвы. — Новосибирск: Наука, 1980. — 240 с.

4. *Инженерно-геологический мониторинг промыслов Ямала: В 2 т. Т. 1: Моделирование термомеханического взаимодействия сооружений с грунтами / Дубина М. М., Конавалов В. В., Цибульский В. Р., Черняков Ю. А.* — Новосибирск: Наука, 1996. — 136 с.

5. *Долгих Г. М., Кинцлер Ю. Э., Окунев С. Н.* Практический опыт строительства оснований зданий и сооружений в условиях ВМГ. — Тюмень: НПО «ФундаментстройАрко», 2002. — 155 с.

6. *Кузьмин Г. П.* Подземные сооружения в криолитозоне. — Новосибирск: Наука, 2002. — 176 с.

7. *Соловьев И. Г., Васильевич А. В.* Анализ теплодинамики мерзлого грунта методом гармонической линеаризации (статья в настоящем сборнике).

8. *Попов Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1988. — 256 с.

*I. G. Soloviev, A. E. Panshyn*

*ALGEBRAIC METHOD OF ANALYSIS FROZEN GROUND (PERMAFROST)  
HEATDYNAMICS BASED ON HARMONIC LINEARIZATION*

*The algebraic scheme of Stephan's task analysis based on the method of harmonic linearization is considered.*