В. Л. Якушев, Д. Г. Кучерявенко

Расчет сильфонов с учетом геометрической нелинейности

Предлагается численный метод и алгоритм расчета сильфонов с косинусоидальной гофрировкой мембран. При этом каждая мембрана рассматривается как геометрически нелинейная оболочка вращения. Приводятся результаты расчета сварного сильфона.

Сильфоны — распространенные элементы различных конструкций, позволяющие получать значительные перемещения в пределах упругости. Они обеспечивают герметичность и могут работать при большом количестве циклов нагружения (рис. 1). В последние годы широкое распространение получили сильфоны из штампованных кольцевых мембран. В этом случае удается достигнуть большой глубины гофрирования при сравнительно простой технологии изготовления. В настоящей статье предлагается методика расчета сильфонов, в которой каждая мембрана рассматривается как геометрически нелинейная оболочка вращения. В используемых уравнениях не накладываются ограничения на перемещения и углы поворота срединной поверхности. Расчет производится численно при помощи ЭВМ.

Рис. 1. Внешний вид сильфонов

1. Описание алгоритма расчета сильфонов

Сильфон представляется как совокупность мембран, работающих в одинаковых условиях. Поэтому весь расчет сводится к изучению одной мембраны, которая считается оболочкой вращения, нагруженной равномерным давлением и распределенными силами по ее краям.

Для расчета мембраны был использован метод [1], позволяющий учитывать изменение геометрии мембраны в процессе нагружения.

Рассмотрим в системе координат x, y, q осесимметрично нагруженную оболочку толщины h, срединная поверхность которой получена в результате вращения плоской кривой $y = f(x)$ относительно оси y (рис. 2).

Координаты срединной поверхности x, y, угол наклона φ между осью x и касательной к срединной поверхности, радиусы кривизны в меридиальном r_1 и в окружном r_2 направлениях являются известными функциями длины дуги срединной линии s.

Соответствующие величины в недеформированном состоянии отмечаются нулевым индексом. Считаем, что в начальном положении для срединной линии известны x, y, φ и $\frac{d\varphi}{ds}$ как функции s.

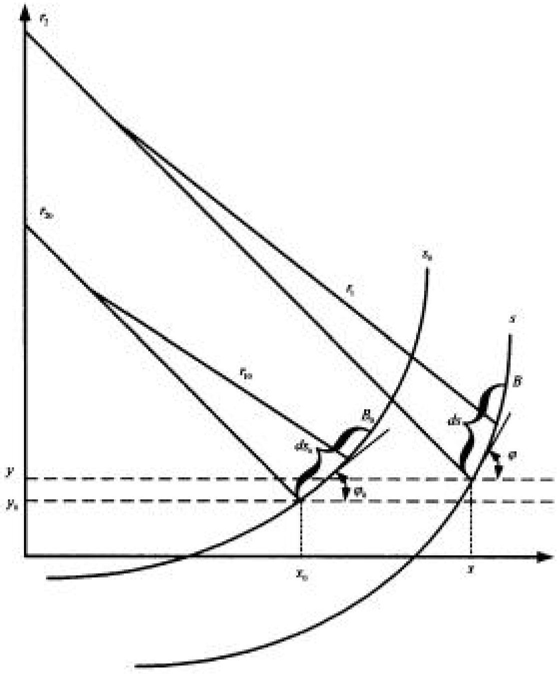

Рис. 2. Деформация срединной поверхности оболочки.

Величины с нулевым индексом относятся
к недеформированному состоянию

На основании гипотез Кирхгофа-Лява, деформация ε_φ произвольного слоя меридионального сечения, лежащего на расстоянии z по нормали к срединной поверхности (касательная и нормаль к срединной поверхности составляют правую систему координат), выразится через два параметра ε_1 и k_1 в виде:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_1 - zk_1, \qquad (1)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{ds}{ds_0} - 1, \qquad k_1 = \frac{1+\varepsilon_1}{r_1} - \frac{1}{r_{10}}. \qquad (2)$$

Если известны ε_1 и k_1, то новые координаты деформированной срединной линии определяются из уравнений:

$$\frac{d\varphi}{ds_0} = k_1 + \frac{1}{r_1}, \qquad \frac{dx}{ds_0} = (1+\varepsilon_1)\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds_0} = (1+\varepsilon_1)\sin\varphi. \qquad (3)$$

Аналогичным образом определим деформацию ε_θ:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_2 - zk_2, \qquad (4)$$

где

$$\varepsilon_2 = \frac{x}{x_0} - 1, \qquad k_2 = \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_0}{x_0}. \qquad (5)$$

Для решения нелинейной задачи будем использовать метод продолжения по некоторому параметру t [1]. Для этого продифференцируем по t уравнения равновесия и геометрические уравнения (3). В случае не малых смещений и углов поворота уравнения равновесия записываются так [1]:

$$\frac{\partial^2 N_\varphi}{\partial s_0 \partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(1+\varepsilon_1)(N_\varphi - N_\theta)}{x_0}\cos\varphi - Q_\varphi\left(k_1 + \frac{d\varphi_0}{ds_0}\right) + (1+\varepsilon_1)P_\varphi\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial s_0 \partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(1+\varepsilon_1)(M_\varphi - M_\theta)}{x}\cos\varphi - Q_\varphi(1+\varepsilon_1)\right] = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 Q_\varphi}{\partial s_0 \partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(1+\varepsilon_1)\left(N_\varphi \sin\varphi + Q_\varphi \cos\varphi\right)}{x} + N_\varphi\left(k_1 + \frac{d\varphi_0}{ds_0}\right) + (1+\varepsilon_1) P_z\right] = 0,$$

где N_φ, N_θ — нормальные в сечениях силы; Q_φ — перерезывающая сила; M_φ, M_θ — изгибающие моменты; P_φ, P_z — соответственно касательная и нормальная к срединной линии составляющие внешней нагрузки. В дальнейшем $P_\varphi = 0,$ а $P_z = \beta t.$

На основании закона Гука имеем:

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \qquad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$

$$M_\varphi = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(k_1 + \nu k_2), \qquad M_\theta = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(k_2 + \nu k_1), \qquad (7)$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Из этих соотношений можно найти $N_\varphi, M_\varphi, N_\theta, M_\theta$ как функции $\varepsilon_1, k_1, \varphi, x, y,$ воспользовавшись (5) и (7). После их подстановки в (6) и (3) получим систему шести дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_0 \partial t} + A\frac{\partial F}{\partial t} + B = 0, \qquad (8)$$

где F — столбец из величин $Q_\varphi, \varepsilon_1, k_1, \varphi, x, y;$ A и B — квадратная матрица и вектор, являющиеся функциями от s и меняющиеся в процессе нагружения.

Уравнения (8) в общем виде аналитически не решаются, поэтому они решались численно. Для этого была введена сетка с шагом δ по координате s и τ по t. Шаг δ может меняться в зависимости от s произвольным образом и определяется соответственно необходимой точности. Он может быть обусловлен другими требованиями, например, получением значений всех функций в каких-либо точках срединной поверхности, поскольку вектор известен только в конечном числе точек срединной поверхности.

Предположим, что при $t = t_j$ известен вектор F и матрицы A и B в ряде точек вдоль срединной линии. Обозначая производную $\frac{\partial F}{\partial t}$ через $\Phi,$ приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{d\Phi}{ds_0} + A(s_0)\Phi + B(s_0) = 0. \qquad (9)$$

Граничные условия, определяющие характер закрепления мембран, устанавливают для (9) двухточечную краевую задачу, для решения которой применяется метод ортогональной прогонки [3]. Величина Φ заменялась отношением конечных величин $\frac{\Delta F}{\tau_j}$, откуда и определялось $\Delta F'$. После этого находились новые значения A и B в (9) для $\tilde{F} = F_j + \Delta F_j$. После этого вновь решалась краевая задача и определялись значения ΔF^2. Окончательно величина приращения на слое t находилась по формуле $\Delta F_j = \frac{\Delta F' + \Delta F^2}{2}.$ Далее весь процесс повторялся для $t_{j+1} = t_j + \tau_j.$ Шаг по времени τ_{j+1} выбирался автоматически следующим образом:

$$\tau_{j+1} = \tau_j \sqrt{\frac{l}{\left|\Delta F^2\right| - \left|\Delta F'\right|}}, \qquad (10)$$

где l — некоторая малая величина, устанавливаемая путем пробных расчетов. Подробно метод численного расчета описан в [1, 4].

2. Расчет сильфонов с косинусоидальной гофрировкой

Приведенный выше алгоритм был реализован программно. На его основе была решена задача о расчете сварного сильфона с косинусоидальной гофрировкой. Схема такого сильфона показана на рис. 3.

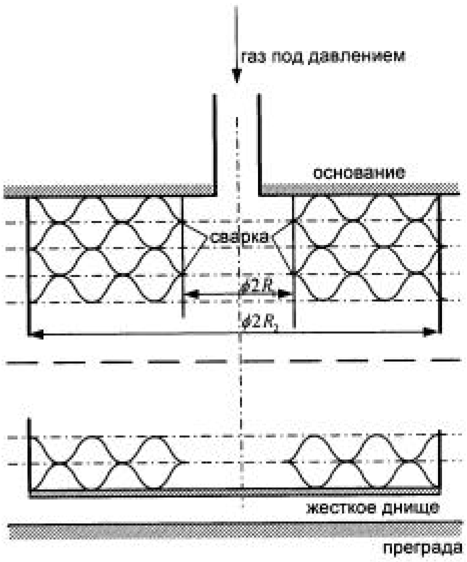

Рис. 3. Схема сварного сильфона с косинусоидальной гофрировкой

Каждая мембрана представляет собой кольцевую гофрированную пластину. Все пластины соединены между собой сваркой по внешнему и внутреннему радиусам. Сильфон прикреплен к недеформируемому основанию и имеет жесткое днище. Длина сильфона в ненагруженном состоянии равна *L*.

Внутрь сильфона подается газ под давлением *P*. В результате деформации пластин его длина начинает увеличиваться. При некотором давлении P_1 днище сильфона достигает преграды. После этого при увеличении давления его длина остается неизменной. Таким образом, для каждой мембраны будут существовать два типа граничных условий (рис. 4).

Первый тип — $P < P_1$:

$$x = R_1, \quad \dot\varphi = \dot N_\varphi = 0, \quad Q_\varphi = \frac{xP}{2}; \qquad x = R_2, \quad \dot\varphi = \dot N_\varphi = \dot y = 0. \tag{11}$$

В этом случае считается, что внешний край мембраны не имеет смещения в направлении оси *y*. Сила Q_φ на внутреннем крае появляется за счет действия остальных мембран.

Второй тип — $P \geq P_1$:

$$x = R_1, \quad \dot\varphi' = \dot N_\varphi = \dot y = 0; \qquad x = R_2, \quad \dot\varphi = \dot N_\varphi = \dot y = 0. \tag{12}$$

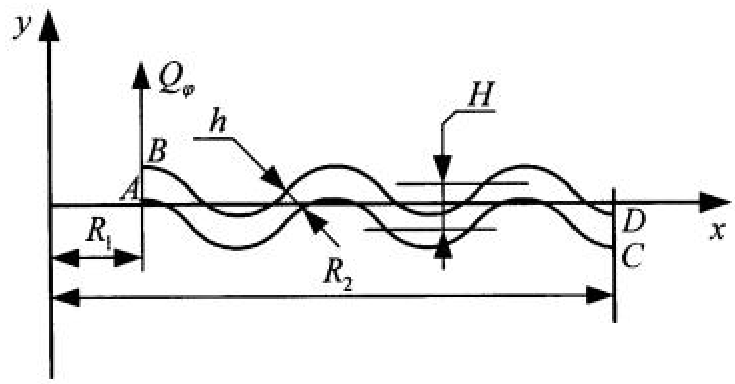

Рис. 4. Граничные условия для мембраны

Число пластин было равно $N = 30$. Внутренний радиус $R_1 = 7{,}1$ мм, внешний $R_2 = 15$ мм. Толщина каждой пластины $h = 0{,}1$ мм. Амплитуда отклонений по оси *y*, $H = 0{,}5$ мм. Сильфон нагружался внутренним давлением *P* до 1,3 атм. Изменение длины сильфона по оси было ограничено величиной $\delta = 5$ мм.

Координата *y* срединной поверхности задавалась как функция:

$$y = H\cos(ax + b), \tag{13}$$

где *a* и *b* определялись из условий:

$$\begin{aligned} &x = R_1, && x = R_2, \\ &y = H, && y = -H, \\ &ax + b = 0; && ax + b = 5\pi. \end{aligned} \tag{14}$$

Окончательный вид формулы (13) записывается следующим образом:

$$y = H\cos\left[\frac{5\pi}{R_2 - R_1}(x - R_1)\right]. \tag{15}$$

Угол наклона φ срединной поверхности к оси *x* равен:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx} = -\operatorname{arctg}\left\{\frac{5\pi H}{R_2 - R_1}\sin\left[\frac{5\pi}{R_2 - R_1}(x - R_1)\right]\right\}. \tag{16}$$

Длина вдоль срединной поверхности *s* определяется путем численного интегрирования:

$$s = \int_{x=R_1}^{x}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{17}$$

При этом считалось, что при $x = R_1$, $s = 0$.

Производная φ по *s* находилась аналитически:

$$\frac{d\varphi}{ds_0} = \frac{d\varphi}{dx_0}\frac{dx_0}{ds_0} = -\frac{\left(\frac{5\pi}{R_2 - R_1}H\right)^2\cos\left[\frac{5\pi}{R_2 - R_1}(x - R_1)\right]}{\left[1 + \left(\frac{5\pi}{R_2 - R_1}H\right)^2\sin^2\left\{\frac{5\pi}{R_2 - R_1}(x - R_1)\right]\right]^{3/2}}. \tag{18}$$

Расчетные точки располагались через равные расстояния по оси *x*. В этом случае шаг по *s* при интегрировании системы (9) оказывался неравномерным. Распределение функций φ, y и $\frac{d\varphi}{ds_0}$ в зависимости от координаты $h = \frac{x - R_1}{R_2 - R_1}$ приведено на рис. 5.

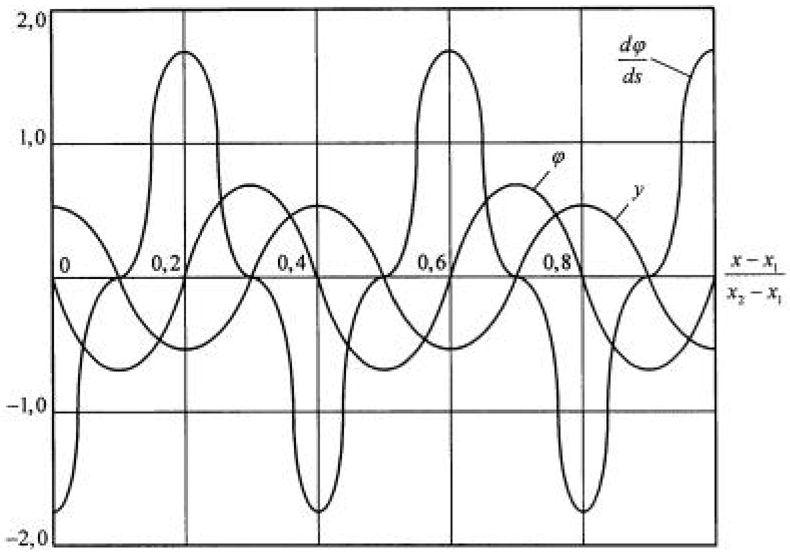

Рис. 5. Распределение функций φ, y и $\frac{d\varphi}{ds_0}$

Причем *y* и *s* обезразмерены следующим образом:

$$\bar{y} = \frac{y}{\mu R_z}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\mu R_z}, \quad \mu = \sqrt{\frac{h}{2R_z}}. \tag{19}$$

Используя метод, описанный выше, был проведен полный расчет напряженно-деформированного состояния одной пластины сильфона (рис. 4). Получены следующие значения напряжений σ_φ и σ_θ:

	$A\left(s=0, z=\frac{h}{2}\right)$	$B\left(s=0, z=-\frac{h}{2}\right)$	$C\left(s=s_0, z=\frac{h}{2}\right)$	$D\left(s=s_0, z=-\frac{h}{2}\right)$
σ_φ	-12,3	12,3	46,3	-46,3
σ_θ	-3,69	3,69	13,9	-13,9

На рис. 6 дана зависимость изменения общей длины сильфона от давления.

При P_1 = 1,055 атм Δy достигает $\delta = 5$ мм и затем остается постоянным. На рис. 6 нанесена безразмерная величина изгибающего момента $\bar{M}_\varphi$ при s = 0 и $s = s_0$ в зависимости от давления.

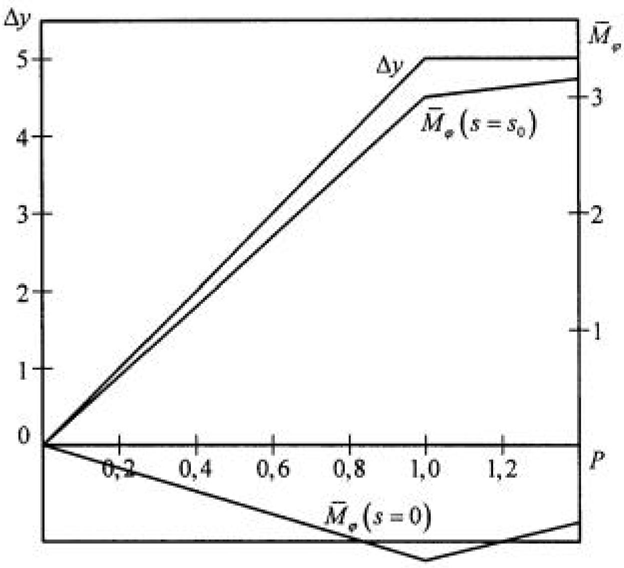

Рис. 6. Изменение общей длины сильфона от давления

литература

1. *Ширко И. В., Якушев В. Л.* Физически и геометрически нелинейные деформации оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6. С. 103–109.

2. *Сильфоны.* Расчет и проектирование / Под ред. Л. Е. Андреевой. Библиотека приборостроения. М.: Машиностроение, 1975.

3. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16, вып. 3.

4. *Якушев В. Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004.

V. L. Yakushev, D. G. Kucheryavenko

COMPUTATION OF SYLPHONS ACCOUNTING FOR GEOMETRIC NON-LINEARITY

The article suggests a numerical method and computing algorithm with regard to sylphons with cosinusoid-like bellows. Any of the bellows being treated as a geometrically non-linear rotational shell. The article quotes computing results on a welded sylphon.