И. Г. Соловьев, А. В. Васькевич

МОДЕЛЬ ТЕПЛОДИНАМИКИ ГРУНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Дано представление термодинамической модели грунта в пространстве состояний зональных температур. Приведены результаты численного анализа

Исследуется вопрос о моделировании теплодинамических процессов в грунтах в условиях динамического промерзания и оттаивания. Поставленная задача имеет давнюю историю [1–4] и хорошо разработанный вычислительный аппарат [5, 6]. Однако развитие современных технических средств теплостабилизации отрицательных температур [7], с одной стороны, качественное совершенство и доступность информационно-вычислительных ресурсов [8] — с другой, делает актуальным решение новой задачи о стабилизации мерзлотных условий грунтов в оперативно динамическом режиме, как это реализуется в системах автоматического регулирования с обратными связями по контролируемым состояниям среды [9].

Данная работа носит вводный характер и посвящена описанию математической модели грунтов как объектов автоматизированного терморегулирования. По сути, рассматривается классическая задача Стефана [3] в непрерывном времени — *t*, но приведенная к дискретным осредненным состояниям зон, распределенных в пространстве. Для простоты анализа ограничимся одномерным случаем зонально-слоевого разделения по глубине, как это показано на рис. 1, где зафиксирована ситуация с протаиванием верхней части грунта.

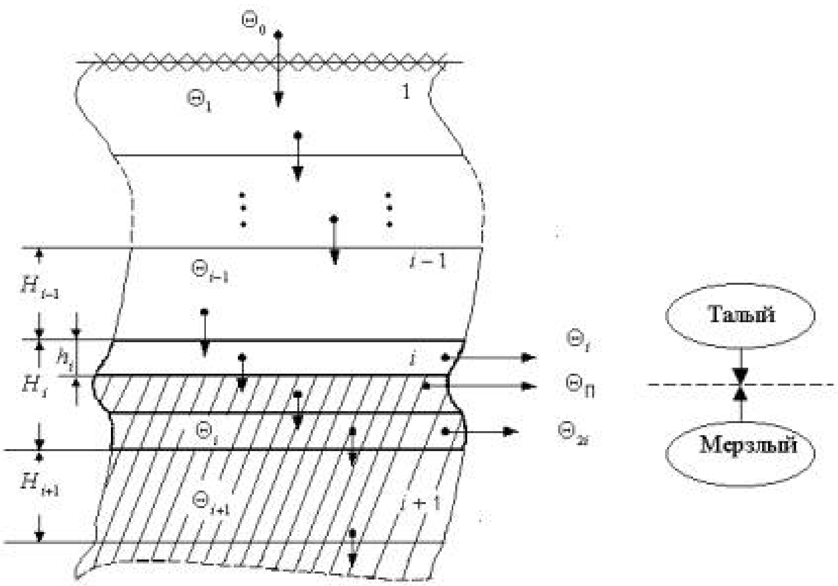

Рис. 1. Схема грунта с зоной фазового разделения

Каждая *i*-я зона характеризуется: Θ_i (*t*) — средней температурой, H_i — величиной (размером), $\Theta_{\Pi i}$ — средней температурой фазового перехода, $\Delta\Theta_i$ — динамическим диапазоном, в пределах которого процессы фазового перехода в зоне начинаются и заканчиваются, что записывается в виде

$$\Theta_i(t) \in \,]\Theta_{\Pi i} - \Delta\Theta_i, \Theta_{\Pi i} + \Delta\Theta_i[\, . \qquad (1)$$

Иначе говоря, если $\Theta_i(t) \geq \Theta_{\Pi i} + \Delta\Theta_i$, то *i*-я зона находится в талом состоянии; если $\Theta_i(t) \leq \Theta_{\Pi i} - \Delta\Theta_i$, то i-я зона в мерзлом состоянии; в случае (1) зона содержит как талые, так и мерзлые подобласти и слой фазового перехода при $\Theta_{\Pi i}$ *).

Объемные параметры зон талого и мерзлого состояний (рис. 1) будем оценивать переменной $m_i(t) = h_i(t)/H_i$. В условиях (1) соответствующую переменную определим через температуру $\Theta_i(t)$ следующим образом: если

$$\mu_i^{0}(t) = \frac{1}{2 \cdot \Delta\Theta_i}\left(\Theta_i(t) - \Theta_{\text{п}i} + \Delta\Theta_i\right),$$

то искомая зависимость имеет вид:

$$\mu_i(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_i^{0}(t) \le 0, \\ \mu_i^{0}(t), \text{ если } \mu_i^{0}(t) \in]0, 1[, \\ 1, \text{ если } \mu_i^{0}(t) \ge 1. \end{cases} \qquad (2)$$

С учетом вновь введенного обозначения номера всех талых зон в момент времени *t* определяются условием

$$I_{\text{Т}}(t) = \{i: m_i(t) = 1\},$$

номера зон со слоями фазовых переходов

$$I_{\text{П}}(t) = \{i: 0 < m_i(t) < 1\}$$

и номера мерзлых зон

$$I_{\text{М}}(t) = \{i: m_i(t) = 0\}.$$

Кроме указанных переменных состояния, каждая слоевая зона характеризуется теплофизическими параметрами, такими как: теплоемкость грунта в талом и мерзлом состояниях соответственно — $c_{\text{Т}i}$, $c_{\text{М}i}$; теплопроводность — $l_{\text{Т}i}$, $l_{\text{М}i}$; объемная влажность — b_i. Для зон с переходным состоянием $I \in I_{\text{П}}(t)$ соответствующие характеристики определяются как функции своих m_i, т. е.

$$c_i(\mu_i) = \mu_i c_{\text{Т}i} + (1 - \mu_i) c_{\text{М}i}, \quad \lambda_i(\mu_i) = \mu_i \lambda_{\text{Т}i} + (1 - \mu_i)\lambda_{\text{М}i}. \qquad (3)$$

Указанный способ задания параметров является универсальным для

$\forall i \in \; \in I = I_{\text{Т}}(t) \cup I_{\text{П}}(t) \cup \; I_{\text{М}}(t),$

так как $\langle c_i(0), \lambda_i(0)\rangle = \langle c_{\text{М}i}, \lambda_{\text{М}i}\rangle, \quad \langle c_i(1), \lambda_i(1)\rangle = \langle c_{\text{Т}i}, \lambda_{\text{Т}i}\rangle.$

При отсутствии конвективного теплопереноса термодинамика непереходных зон $(i \in I_{\text{Т}}(t) \cup I_{\text{М}}(t))$ удовлетворяет уравнению Фурье [10], которое для дискретных пространственных координат может быть записано в виде системы

$$H_j c_j(\mu_j)\frac{d\Theta_j(t)}{dt} = \lambda_{j-1,j}\Theta_{j-1}(t) + \lambda_{j,j+1}\Theta_{j+1}(t) - (\lambda_{j-1,j} + \lambda_{j,j+1})\Theta_j(t),$$
$$j \in I_{\text{Т}}(t) \cup I_{\text{М}}(t) \qquad (4)$$

с межслоевыми теплопроводностями

$$\lambda_{i-1,i} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{i-1}(\mu_{i-1}) + \lambda_i(\mu_i)),$$

где $\lambda_{i-1,i} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{i-1}(\mu_{i-1}) + \lambda_i(\mu_i))$. Для вывода уравнения переходной зоны воспользуемся введенными на рис. 1 обозначениями. По аналогии с (4) можно записать:
для талой подзоны

$$\frac{d}{dt} c_{Ti} h_i(t) \Theta_{1i}(t) = \lambda_{i-1,i}(\Theta_{i-1}(t) - \Theta_{1i}(t)) - \lambda_{Ti}(\Theta_{1i}(t) - \Theta_{\Pi i}),$$

для мерзлой

$$\frac{d}{dt} c_{Mi}(H_i - h_i(t))\Theta_{2i}(t) = \lambda_{Mi}(\Theta_{\Pi i} - \Theta_{2i}(t)) - \lambda_{i,i+1}(\Theta_{2i}(t) - \Theta_{i+1}(t)),$$

условие Стефана для фазового перехода

$$\rho_i \beta_i Q_\Phi \frac{d}{dt} h_i(t) = \lambda_{Ti}(\Theta_{1i}(t) - \Theta_{\Pi i}) - \lambda_{Mi}(\Theta_{\Pi i} - \Theta_{2i}(t)),$$

где Q_Φ — энергия фазового перехода для воды, r$_i$ — плотность сухого грунта. Суммировав три приведенных уравнения, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(c_{Ti} h_i(t)\Theta_{1i}(t) + c_{Mi}(H_i - h_i(t))\Theta_{2i}(t) + \rho_i\beta_i Q_\Phi h_i(t)) = \\ &= \lambda_{i-1,i}(\Theta_{i-1}(t) - \Theta_{1i}(t)) - \lambda_{i,i+1}(\Theta_{2i}(t) - \Theta_{i+1}(t)).\end{aligned} \tag{5}$$

По аналогии с $\mu_i^{\Pi}(t)$ (2) введем линейную модель, связывающую среднюю температуру зоны $\Theta_i(t)$ с температурами $\Theta_{1i}(t),\ \Theta_{2i}(t)$ в подзонах следующими соотношениями:

$$\Theta_{1i} = \tfrac{1}{2}(\Theta_i + \Theta_{\Pi i} + \Delta\Theta_i), \quad \Theta_{2i} = \tfrac{1}{2}(\Theta_i + \Theta_{\Pi i} - \Delta\Theta_i). \tag{6}$$

Из графиков введенных зависимостей (рис. 2) следует, что с достижением условия $\Theta_i = \Theta_{\Pi i} - \Delta\Theta_i$ в i-й зоне начинается процесс перехода из мерзлого состояния в талое. Слой фазового перехода, по сути, образует первую подзону с $\Theta_{1i} = \Theta_{\Pi i}$ и $h_i \approx 0$. Вторая подзона охватывает размер почти всей i-й зоны $H_i - h_i \approx H_i$, поэтому $\Theta_{2i} = \Theta_i$. Процесс оттаивания i-й зоны заканчивается, когда выполнено условие: $\Theta_i = \Theta_{\Pi i} + \Delta\Theta_i$, при этом слой фазового перехода, образуя вторую подзону $\Theta_{2i} = \Theta_{\Pi i}$ нулевого размера $H_i - h_i \approx 0$, переходит в первую подзону следующего $i + 1$ сегмента, средняя температура i-го сегмента совпадает со средней первой зоны: $\Theta_{1i} = \Theta_i$.

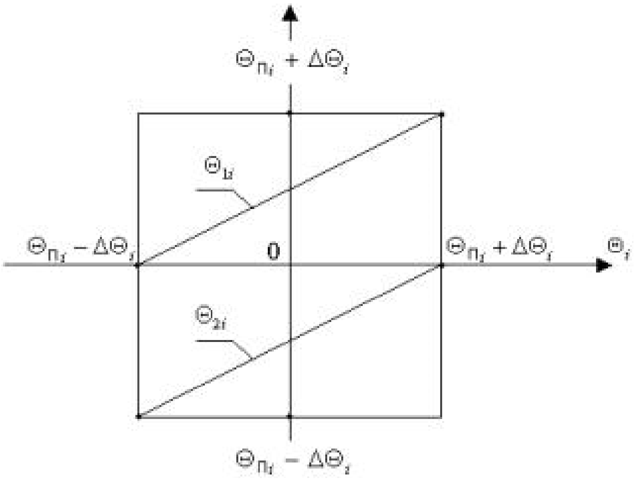

Рис. 2. Зависимость температуры *i*-й зоны и соответствующих подзон

Осуществим подстановку (6) в (5). С учетом определения $m_i = h_i / H_i$ и модели (2) для левой части уравнения после выноса H_i за знак производной справедливы следующие равенства:

$$H_i\frac{d}{dt}(\rho_i\beta_i Q_\Phi \mu_i(t)+c_{Ti}\mu_i(t)\Theta_{1i}(t)+c_{Mi}(1-\mu_i(t))\Theta_{2i}(t))=$$

$$=H_i\frac{d}{dt}[\mu_i(t)(\rho_i\beta_i Q_\Phi+c_{Ti}\frac{1}{2}(\Theta_i(t)+\Theta_{\Pi i}+\Delta\Theta_i)-$$

$$-c_{Mi}\frac{1}{2}(\Theta_i(t)+\Theta_{\Pi i}-\Delta\Theta_i))+c_{Mi}\frac{1}{2}(\Theta_i(t)+\Theta_{\Pi i}-\Delta\Theta_i)]=$$

$$=H_i[\mu_i(t)\frac{1}{2}(c_{Ti}-c_{Mi})+\frac{1}{2}c_{Mi}+\frac{1}{2\Delta\Theta_i}(\rho_i\beta_i Q_\Phi+\frac{1}{2}(c_{Ti}(\Theta_i(t)-\Theta_{\Pi i}+\Delta\Theta_i)-$$

$$-c_{Mi}(\Theta_i(t)-\Theta_{\Pi i}+\Delta\Theta_i)+2(c_{Ti}-c_{Mi})\Theta_{\Pi i}+2c_{Mi}\Delta\Theta_i))]\frac{d\Theta_i(t)}{dt}=H_i(c_i(\mu_i(t))+\tau_{\Phi i})\frac{d\Theta_i(t)}{dt},$$

где

$$\tau_{\Phi i}=(\rho_i\beta_i Q_\Phi+(c_{Ti}-c_{Mi})\Theta_{\Pi i})/2\,\Delta\Theta_i, \qquad (7)$$

а $c_i(m_i(t))$ — из (3). Для правой части уравнения (5) имеем:

$$\lambda_{i-1,i}(\Theta_{i-1}(t)-\Theta_{1i}(t))-\lambda_{i,i+1}(\Theta_{2i}(t)-\Theta_{i+1}(t))=$$

$$=\lambda_{i-1,i}(\Theta_{i-1}(t)-\frac{1}{2}(\Theta_i(t)+\Theta_{\Pi i}+\Delta\Theta_i))-$$

$$-\lambda_{i,i+1}(\frac{1}{2}(\Theta_i(t)+\Theta_{\Pi i}-\Delta\Theta_i)-\Theta_{i+1}(t))=$$

$$=\lambda_{i-1,i}\Theta_{i-1}(t)+\lambda_{i,i+1}\Theta_{i+1}(t)-\frac{1}{2}(\lambda_{i-1,i}+\lambda_{i,i+1})\Theta_i(t)+\Delta q_i,$$

где

$$\Delta q_i=\frac{1}{2}[(\lambda_{i,i+1}-\lambda_{i-1,i})\Delta\Theta_i-(\lambda_{i-1,i}+\lambda_{i,i+1})\Theta_{\Pi i}], \qquad (8)$$

а

$$\lambda_{i-1,i} = \frac{1}{2}(\lambda_{i-1}(\mu_{i-1}) + \lambda_i(\mu_i)), \;\; \lambda_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\lambda_i(\mu_i) + \lambda_{i+1}(\mu_{i+1})) \tag{9}$$

могут содержать μ_{i-1}, μ_i, μ_{i+1}, неравные предельным значениям $\{0 \cup 1\}$. В этом случае имеет место теплодинамика сочлененных зон с фазовыми переходами. Приравняв левую и правую части полученных выражений с учетом (4), приходим к искомой модели теплодинамики грунта.

Для $j \in I_{\text{т}}(t) \cup I_{\text{м}}(t)$

$$H_j c_j(\mu_j)\frac{d\Theta_j(t)}{dt} = \lambda_{j-1,j}\Theta_{j-1}(t) + \lambda_{j,j+1}\Theta_{j+1}(t) - (\lambda_{j-1,j} + \lambda_{j,j+1})\Theta_j(t), \tag{10}$$

для $i \in I_{\text{п}}(t)$

$$H_i(c_i(\mu_i(t)) + \tau_{\Phi i})\frac{d\Theta_i(t)}{t} = \lambda_{i-1,i}\Theta_{i-1}(t) + \lambda_{i,i+1}\Theta_{i+1}(t) - \frac{1}{2}(\lambda_{i-1,i} + \lambda_{i,i+1})\Theta_i(t) + \Delta q_i,$$

где $\tau_{\Phi i}$, Δq_i и $\lambda_{k,k+1}$ — из (7)–(9) соответственно, причем μ_i = {0 $\cup$ 1}, а μ_i Î $]0, 1[$.

Моделирование теплодинамических процессов в пятислойной схеме с однородными свойствами осуществлялось для трех начальных значений распределения Θ_i (0) вдоль геотермали [11]. В таблице приняты следующие обозначения: *H* — мощность слоевого деления (м), $\Theta_{\text{п}}$ — среднегодовая температура поверхности (°С), $\Theta_{\text{б}}$ — квазистатическое значение температуры на глубине 12 м.

H	$\frac{c_{\text{т}}}{c_{\text{м}}}$	$\frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda_{\text{м}}}$	$\Delta\Theta$	b	$\Theta_{\text{п}}$	Начальное распределение Θ_i (0) по геотермали						
						$\Theta_{\text{п}}$	1	2	3	4	5	$\Delta\Theta_{\text{с}}$
2	$\frac{3.13\cdot10^6}{2.34\cdot10^6}$	$\frac{1.51}{1.69}$	1	0,25	-0,5	-10	-4	-3,4	-3,4	-3,3	-2,7	-2
					0	0	3,4	2,6	1,7	1,1	0,9	0
					0	10	11,3	9,2	6,7	4,7	3,2	2

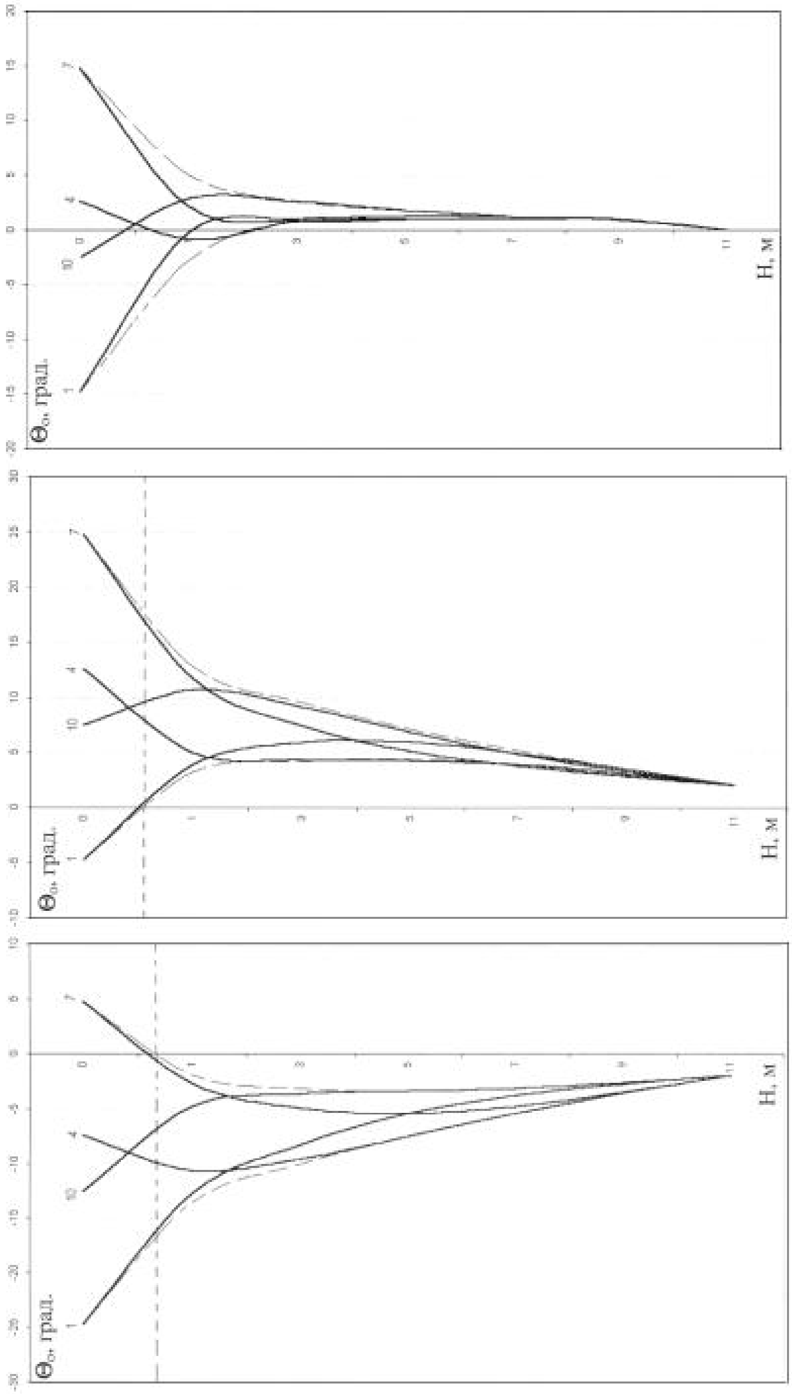

Рис. 3. Распределение температуры по глубине

Годовая динамика температуры поверхности задается функцией вида

$$\Theta_0(t) = \Theta_0 - \Delta\Theta_0 \sin \omega \cdot t, \quad \Delta\Theta_0 = 15\ °C.$$

Численное интегрирование системы (10) осуществлялось по явной схеме Эйлера.

Результаты моделирования представлены на рис. 3, где выделены графики распределения температур по глубине для средних чисел января — 1, апреля — 4, июля — 7 и октября — 10. Наибольшее затухание амплитуды колебаний температуры по глубине наблюдается в случае нулевой геотермали, где зона деятельного слоя грунта, отмеченная пунктиром, максимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фельдман Г. М.* Методы расчета температурного режима мерзлых грунтов. М.: Наука, 1973. 254 с.

2. *Гречищев С. Е.*, *Чистотинов Л. В.*, *Щур Ю. Л.* Основы моделирования криогенных физико-геологических процессов. М.: Наука, 1984. 232 с.

3. *Горбылёв М. И.*, *Красс М. С.*, *Соловьев Б. С.* Искусственное замораживание грунтов при освоении месторождений нефти и газа Западной Сибири. НТС Задачи механики природных процессов / Под ред. С. С. Григоряна, М. С. Красс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. С. 64–70.

4. *Горелик Я. Б.*, *Колунин В. С.* Физика и моделирование криогенных процессов в литосфере / Отв. ред. акад. В. П. Мельников. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео», 2002. 317 с.

5. *Инженерно-геологический* мониторинг промыслов Ямала. В 2 т. Т. 1: Моделиро-вание термомеханического взаимодействия сооружений с грунтами / М. М. Дубина, В. В. Коновалов, В. Р. Цибульский, Ю. А. Черняков. Новосибирск: Наука, 1996. 136 с.

6. *Пермяков П. П.*, *Аммосов А. П.* Математическое моделирование техногенного замерзания в криолитозоне. Новосибирск: Наука, 2003. 224 с.

7. *Долгих Г. М.*, *Кинцлер Ю. Э.*, *Окунев С. Н.* Практический опыт строительства оснований зданий и сооружений в условиях ВМГ. Тюмень: Фундаментстройаркос, 2002. 156 с.

8. *Черняк Л.* GRID как будущее компьютинга // Открытые системы. 2003. № 1. С. 16–19.

9. *Современные* системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 832 с.

10. *Ершов Э. Д.* Общая геокриология. М.: Недра, 1990. 559 с.

11. *Инженерно-геологический* мониторинг промыслов Ямала. В 2 т. Т. 2: Геокриологические условия освоения Бованенковского месторождения / В. В. Баулин, В. И. Аксёнов, Г. И. Дубиков и др. Тюмень: Ин-т проблем освоения Севера СО РАН, 1996. 240 с.

I. G. Solovyov, A. V. Vas'kevitch

A MODEL OF SOILS' HEAT DYNAMICS IN STATE SPACE

The article presents a thermodynamic model of soils in the state space of zonal temperatures, quoting the results of numerical analysis.

---

*) В зависимости от объемной влажности b_i и минерализации воды температура для зон неодинакова.