А. Н. Паршуков, О. В. Бессмельцева

Технология локализации корней полиномиальных множеств

Предложена вычислительная технология локализации границы области расположения корней семейств полиномов системой линейных неравенств.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача локализации корней семейства полиномов вида (в обозначениях [1]):

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}}(n, s) = a^0(n, s) + \mathbf{D}\boldsymbol{a}(n-1, s), \qquad (1)$$

где $a^0(n, s) = s^n + a^0_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a^0_i\, s^i \ldots + a^0_0$,

$$\mathbf{D}\boldsymbol{a}(n-1, s) = \{\mathrm{d}\ a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + \mathrm{d}\, a_0 : \mathrm{d}\, a_i\ \hat{\mathrm{I}}\ [-\mathrm{D}a_i;\ \mathrm{D}a_i],\ \ i\ \hat{\mathrm{I}}\ \overline{0, n-1}\ \},$$

а s — свободная переменная.

Полином $a^0(n, s)$ будем называть «средним»; второе слагаемое в (1) описывает интервалы отклонений коэффициентов относительно «средних» значений.

Корням l_r полинома $a^0(n, s)$ соответствуют точки на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}^1$; наличие интервальной неопределенности коэффициентов в (1) (обусловленное вторым слагаемым) приводит к тому, что корни расплываются в некоторую область $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}})$ (рис.). (На рисунке $\mathrm{L}(a^0)$ обозначено множество корней l_r полинома $a^0(n, s)$: $\mathrm{L}(a^0) = \{\mathrm{l}_r,\ r\ \hat{\mathrm{I}}\ \overline{1, n}\ \}\ \grave{\mathrm{I}}\ \boldsymbol{C}^1$). Настоящая работа посвящена технологии локализации корней этой области системой линейных неравенств.

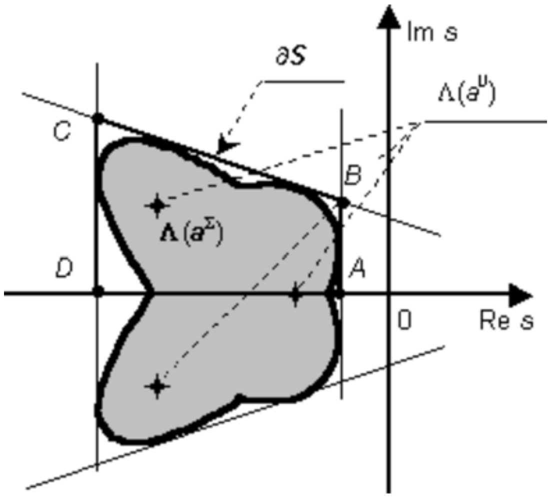

Рис. Локализация области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{S}})$ системой линейных неравенств

В общем виде выпуклая оболочка $\boldsymbol{S}$ на плоскости задается семейством неравенств вида:

$$\boldsymbol{S} = \{s : a_i\, y + b_i x + c_i\ \pounds\ 0, \quad i\ \hat{\mathrm{I}}\ \boldsymbol{I}\ \}\ \grave{\mathrm{I}}\ \boldsymbol{C}^1, \qquad (2)$$

здесь x и y обозначены соответственно действительная x = Re s и мнимая y = = Im s части комплексного числа s; $\boldsymbol{I}$ — мощность множества неравенств

$$\boldsymbol{I} = \overline{1, M}\ .$$

Предполагается, что известна начальная оценка расположения области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$, заданная выпуклой оболочкой вида (2). Зафиксируем a_i, b_i и M, и будем искать такие c_i, при которых линии

$$a_i y + b_i x + c_i = 0 \qquad (3)$$

впервые касаются границы области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$ (см. рис.).

Предлагается схема итеративного вычисления коэффициентов c_i, при которых линия (3) коснется границы области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$.

Вычислительная технология проверки принадлежности области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$ выпуклой оболочке вида (2) изложена в работе [1]. Приведем здесь основное утверждение данной работы.

Утверждение. Пусть $L(a^0) \subset \text{int}\, \boldsymbol{S}$*), тогда для того, чтобы для семейства полиномов (1) выполнялось $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma}) \subset \boldsymbol{S}$, для всех значений коэффициентов из заданных интервалов *достаточно*, чтобы выполнялось условие

$$\mu^* \geq 1, \text{ где } \mu^* = \min_{s \in \partial S} \mu(s),$$

здесь $\partial \boldsymbol{S}$ — граница области $\boldsymbol{S}$.

Важно отметить: условие касания контура $\partial \boldsymbol{S}$ и границы области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$ в точке s соответствует $\mu(s) = 1$.

Технология вычисления значения $\mu(s)$ для точки s контура обхода $\partial \boldsymbol{S}$ содержится в [1].

Отрезок линии (3), который входит в контур $\partial \boldsymbol{S}$, будем называть «значимой» частью. Изменяя c_i в (3), мы тем самым изменяем положение линии на плоскости и, по сути, варьируем контур $\partial \boldsymbol{S}$. Обозначим как $\mu^*(i)$ минимальное значение графика $\mu(s)$, вычисленное вдоль «значимой» части линии (3). Тогда условие касания линии (3) границы области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$ запишется: $\mu^*(i) = 1$.

Проблематика аналитического вычисления такого значения c_i, при котором $\mu^*(i) = 1$, заключается в том, что $\mu^*(i)$ есть алгоритмическая функция; ее значение находится в результате достаточно большого числа вычислений вдоль соответствующей линии.

Предлагаем итеративный алгоритм поиска коэффициента c_i с заданной точностью по $\mu^*(i)$:

$$c_i(k + 1) = c_i(k) + \Delta c_i(k),$$

где k — индекс итерации; $c_i(k)$ — текущее значение переменной c_i; $c_i(k + 1)$ — новое значение c_i. Движению внутрь области соответствует положительное изменение коэффициента c_i: $\Delta c_i(k) \geq 0$. Это движение ограничено:

$$\Delta c_i(k) \in [0, \overline{c_i(k)}], \qquad (4)$$

здесь $\overline{c_i(k)}$ обозначает то минимальное значение $\Delta c_i(k)$, при котором соответствующая линия впервые коснется корней «среднего» полинома $a^0(n, s)$. Обозначим его корни как $\lambda_r = \alpha_r + j\beta_r$, $r \in \overline{1,n}$; здесь явно выделены действительная α_r и мнимая β_r части корня λ_r, j — мнимая единица ($j = \sqrt{-1}$). Тогда

$$\overline{c_i(k)} = \min_{r \in \overline{1,n}} c_i(k, r), \text{ где } c_i(k, r) = -a_i\beta_r - b_i\,\alpha_r - c_i(k). \qquad (5)$$

Для поиска такого значения на отрезке (4), при котором $|\mu^*(i) - 1| \leq \varepsilon$, где ε — заданная точность достижения границы области $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}^{\Sigma})$, воспользуемся классической схемой половинного деления.

В принятых обозначениях схема половинного деления принимает следующий вид.

Алгоритм вычисления $\Delta c_i(k)$

Шаг 1. Проверяем условие $|\mu^*(i) - 1| \leq \varepsilon$. Если данное условие выполняется, тогда переходим на шаг 6. В противном случае переходим на шаг 2.

Шаг 2. Вычисляем $\overline{c_i(k)}$ по формуле (5).

Шаг 3. Принимаем $Dc_i(k) = \overline{c_i(k)}$.

Шаг 4. Проверяем условие $m^*(i)$ ³ 1 для $c_i(k + 1) = c_i(k) + Dc_i(k)$. Если данное условие выполняется, тогда возвращаемся к шагу 1. В противном случае переходим к шагу 5.

Шаг 5. Принимаем $Dc_i(k) = Dc_i(k)/2$ и возвращаемся к шагу 4.

Шаг 6. Останов.

Заключение

Предложенная вычислительная технология позволяет локализовать область расположения корней системой линейных неравенств.

Литература

1. *Паршуков А. Н.* Схема синтеза модального регулятора для объекта с интервальной неопределенностью коэффициентов / Ин-т криосферы Земли СО РАН. Тюмень, 2001. 23 с. Деп. в ВИНИТИ, 09.07.01, № 1616.

A. N. Parshukov, O. V. Bessmeltseva

METHOD OF LOCALIZING THE ROOTS OF POLYNOMIAL SETS

The work suggests a computing method of localizing the roots of polynomial families with a system of linear inequalities.

---

*) За int ***S*** обозначена внутренняя часть области ***S***: int ***S*** = ***S***/¶***S***.