

Г. П. Быстрая, А. В. Калина, Ю. Л. Соловьев, С. И. Студенок

## МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ПОСТРОЕНИИ ПРОГНОЗА ИЗМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ТОПЛИВНОЙ ЭНЕРГЕТИКЕ

*Данная работа направлена на решение проблемы — создание алгоритмов расчета времени забывания экономической системой начальных условий, что должно учитываться при построении методик прогнозирования. Найденные наибольшие показатели Ляпунова свидетельствуют об относительности предсказаний, касается ли это цен на топливо или курсов валют, по которым покупаются и продаются энергоресурсы. К тому же неизвестны уравнения движения, которые дают траектории движения, соответствующие эксперименту, а известны сами траектории (временные ряды) без управляющих параметров. Приводятся конкретные результаты расчета свойств хаотической динамики при анализе развития топливно-энергетических ресурсов РФ и курсов различных валют.*

Хаос в детерминированных системах подразумевает чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две траектории, близкие друг к другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, экспоненциально расходятся за малое в среднем время [1-5]. Такие системы в нелинейной динамике называются системами с *перемешиванием*, если с течением времени ( $t_f$ ) информация о начальных условиях в них полностью утрачивается [2]. О перемешивании мы судим по показателю Ляпунова, точнее, по наибольшему из них. Насколько различные отрасли топливно-энергетического комплекса являются нелинейными и хаотичными? Можно ли использовать современные представления о таких нелинейных и хаотичных системах в анализе состояния отраслей? Влияет ли такое сложное состояние на построение динамических математических моделей краткосрочного или долгосрочного прогнозирования экономической деятельности территорий и их взаимодействия? В каком отношении находятся прогнозные оценки по курсам валют и ценам на энергоресурсы?

Данная статья состоит из трех частей, в первой — в краткой форме даются современные представления о нелинейных хаотических системах и методах «измерения» хаоса и прежде всего времени забывания системой начальных условий. Во второй — приводятся алгоритмы расчета показателей Ляпунова, в том числе наибольшего из них, и энтропии Колмогорова. Тем самым дается методика определения времени забывания начальных условий для некоторых показателей топливно-энергетического комплекса РФ в 1995–2002 гг. В третьей обсуждаются проблемы прогнозирования курсов различных валют.

### 1. Некоторые сведения из нелинейной динамики

**Показатели Ляпунова.** Как вычисляются показатели Ляпунова в наиболее простых задачах нелинейной динамики? Обычно рассматривают систему трех нелинейных дифференциальных уравнений или одного логистического отображения

$$\eta_{k+1} = a\eta_k(1 - \eta_k), \quad (1)$$

здесь  $a$  — параметр уравнения.

Такое отображение в конечно-разностной форме дает в широком интервале значений параметра не только периодические, но и хаотические решения, отличающиеся по некоторым своим свойствам от соответствующих непрерывных решений [1]. Конечно-разностный вид этого уравнения соответствует временному предоставлению статистических данных: они указываются для определенного временного интервала — квартала, года.

Если в системе  $\delta\eta_0$  — мера начального расстояния между двумя исходными точками для параметра порядка (переменной)  $h$ , то спустя малое время  $t = k$  расстояние между траекториями  $\eta'_k$  и  $\eta''_k$  ( $k$  — порядковый номер итерации), выходящими из этих точек, становится равным [6]

$$\delta\eta_k = \delta\eta_0 \exp(\lambda k), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — показатель Ляпунова (рис. 1). Расстояние между двумя расчетными соседними траекториями определяется величиной

$$\delta\eta_k = |\eta'_k - \eta''_k|.$$

Аналогичные предположения можно высказать, если обращаться к другим отображениям [7, 8], в том

числе применяемым в анализе фазовых переходов. На рис. 1, а представлены регулярные колебания  $dh_k$  (показатель Ляпунова

$l < 0$ ), на рис. 1, б — возникновение хаотических пульсаций ( $l > 0$ ). В работе [7] отмечалось, что при некоторых значениях управляющих параметров после начальных всплесков решения устанавливаются на одной устойчивой величине, знак которой определяется начальными условиями. В отличие от классической динамической теории фазовых переходов Ландау-Халатникова [8], для которой реализуется одно из двух устойчивых состояний  $h_1$  (или  $h_2$ ) при возрастании одного из параметров, например времени последствия, описываемая переменная начинает осциллировать в малой окрестности одной из фаз (рис. 1, а). Для таких движений показатель Ляпунова принимает отрицательное значение.

На рис. 1, б имеет место переход к хаотическому состоянию, что подтверждается положительным значением показателя Ляпунова. Детерминированный хаос имеет место вблизи аттрактора  $h_2 (< 0)$ , который был задан начальным значением  $h_0 (< 0)$ . На этом рисунке фиксируются небольшие «хаотические флуктуации» параметра порядка, лежащие в пределах, совместимых с сохранением данной фазы (гомофазные флуктуации). В этом случае время жизни детерминированной траектории ( $t_r$ ) является ограниченным.

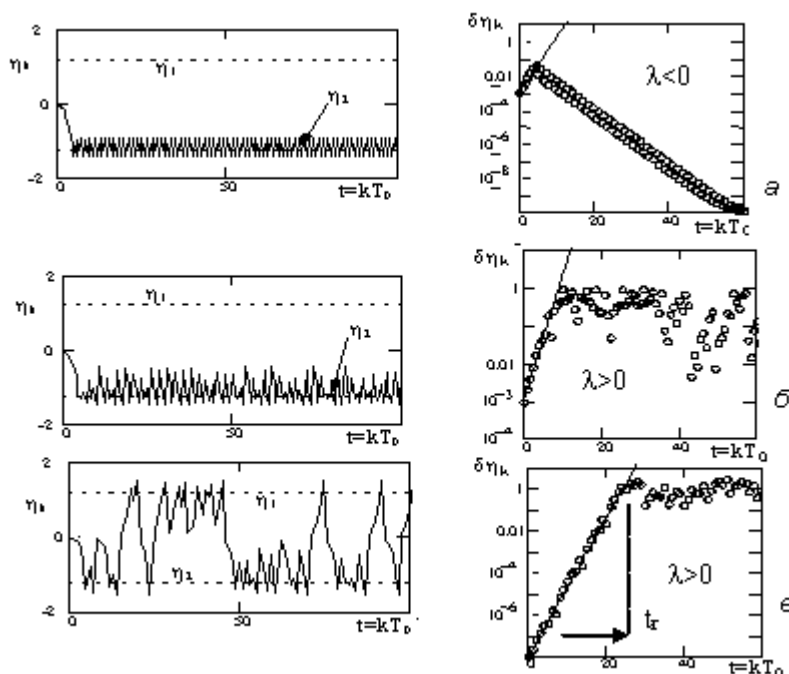
На рис. 1, в фиксируется хаотическая динамика параметра порядка, связанная с гетерофазными флуктуациями. Здесь  $h_1, h_2$  — параметры порядка, соответствующие равновесным временным фазам. В этом отношении переменную  $h_k$  можно трактовать для данного отображения как некоторый параметр порядка, смысл которого устанавливается при решении конкретных задач в системах со структурными превращениями, в том числе в экономических системах.

Показатель Ляпунова для отображения (1) зависит от параметра  $a$ , и он может быть вычислен по формуле [7]

$$\lambda(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{d\varphi(\eta_k)}{d\eta_k} \right|, \quad h_{k+1} = j(h_k). \quad (3)$$

Для других отображений возникают многопараметрические зависимости  $l$  от других управляющих параметров.

Если анализ ведется на макроэкономическом уровне, то для такой системы можно указать область параметров, в которой решение ведет себя хаотически, — это область детерминированного хаоса  $l > 0$ . При  $l > 0$  соответствующий макроэкономический режим является локально неустойчивым и хаотическим; при  $l = 0$  — нейтрально устойчивым; при  $l < 0$  — устойчивым и периодическим.



**Рис. 1.** Хаос и эволюция «расстояния» между двумя итерациями отображения при заданных отличающихся начальных условиях [7].

Расстояние между двумя соседними траекториями  $\eta_k^i$  и  $\eta_k^{\prime\prime}$  ( $k$  — порядковый номер итерации) определялось

$$\text{величиной } dh_k = |\eta_k^i - \eta_k^{\prime\prime}|$$

а)  $d_0 = 10^{-3}$ ,  $l = -0,22$ ; б)  $d_0 = 10^{-3}$ ,  $l = 0,70$ ; в)  $d_0 = 10^{-8}$ ,  $l = 0,76$

**Энтропия Колмогорова.** Энтропия Колмогорова — важнейшая характеристика хаотического движения в

фазовом пространстве произвольной размерности.

Вспомним, что термодинамическая энтропия  $S$  есть мера беспорядка в данной системе. Простой пример системы, в которой  $S$  растет, — молекулы газа, которые вначале помещены в одну половину куба и которым затем внезапно открывается возможность заполнить весь сосуд. Беспорядок в системе нарастает, так как молекулы больше не отделены от другой половины куба. Этот беспорядок связан с ростом нашего незнания о состоянии системы (до того как была убрана перегородка, о расположении молекул мы знали больше). Более строго, энтропия  $S$ , определенная как

$$S \approx - \sum_i P_i \ln P_i,$$

где  $\{P_i\}$  — вероятности для системы оказаться в состояниях  $\{i\}$ , есть мера информации, необходимая для определения местоположения системы в некотором состоянии  $i$ , т. е.  $S$  есть мера незнания о системе.

Этот пример из статистической механики показывает, что, по существу, беспорядок есть понятие из теории информации. Г. Шустер [1] отмечает, что энтропию Колмогорова  $K_0$ , показывающую «насколько динамическая система хаотична», также можно определить формулой Шенона, так что  $K_0$  пропорциональна скорости потери информации о состоянии динамической системы с течением времени. Для одномерных отображений  $K_0$  является также показателем Ляпунова [1].

Итак, энтропия Колмогорова (метрическая энтропия) пропорциональна скорости потери информации о состоянии системы с течением времени и является мерой экспоненциальной скорости разбегания траекторий динамической системы [3, 4]. Определение метрической энтропии — необходимый элемент комплексного анализа на детерминированный хаос, и как показано в [7, 8], она может быть использована в анализе фазовых переходов в различных системах.

**Время, за которое система забывает начальные условия.** При определении информационной энтропии в виде  $S(t) = K_0 t$  со сколь угодно большой точностью округления фазового пространства  $m \times 0$  энтропия максимума не достигает. Анализ существенно упрощается, если зафиксировать конечный порядок округления фазового пространства  $m_0$ , тогда за время  $t_r$  область  $DG = m_0$  расширяется до предельного значения  $\Delta \Gamma = \overline{\delta \eta}$ . В результате время жизни фазовой траектории связано с метрической энтропией  $K_0 = 1$  соотношением [4, 8]:

$$t_r = \frac{1}{K_0} \ln \frac{\overline{\delta \eta}}{\mu_0}. \quad (4)$$

Отметим, что в формуле Г. М. Заславского [4] предельное значение нормировано:  $\overline{\delta \eta} = 1$ .

Другими словами, точное предсказание состояний нелинейной системы возможно только на интервале времени  $t_r$ , а на временах, больших  $t_r$ , возможны лишь статистические предсказания. Для одномерного отображения энтропия Колмогорова равна положительным значениям показателя Ляпунова:  $K_0 = 1 > 0$  [1].

Вычислив таким образом  $K_0$ , можно определить время разбегания двух соседних траекторий за время  $t_r^\circ$   $t_r/t_0$  [2]. При полной неустойчивости различие в траекториях растет со временем экспоненциально. Для конкретно заданной экономической системы с фазовыми переходами, таким образом, можно определить, будет ли ее движение неустойчивым.

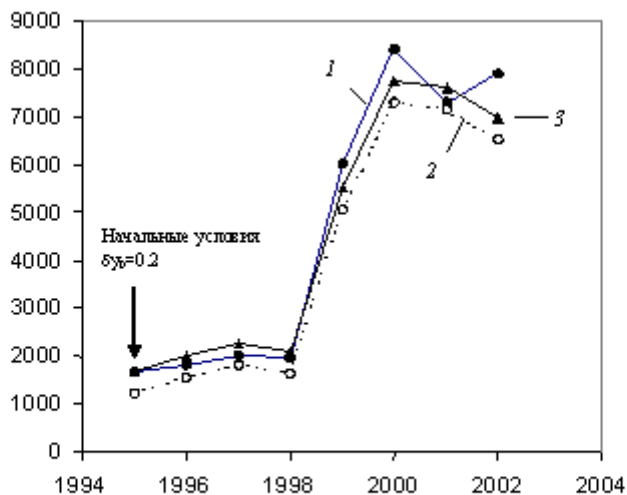
Небольшой сбой с таких траекторий приводит к практически непредсказуемому поведению фазовой траектории [3, 4], анализ таких явлений чрезвычайно важен для практики, так как начальные условия задаются всегда с ограниченной точностью. Например, курс валюты на торгах задается с ограниченной точностью. Именно это и обуславливает невозможность долгосрочного динамического прогноза состояния динамической системы, в данном случае топливно-энергетического комплекса. Энтропия Колмогорова может служить своеобразным индикатором периодического (квазипериодического) поведения параметра порядка ( $K_0 = 0$ ), хаотического ( $K_0 > 0$ ) и случайного ( $K_0 \approx 0$ ). Для *регулярного* движения первоначально близкие точки остаются близкими. Для *хаотического* движения первоначально близкие точки расходятся экспоненциально. Для *случайного* движения первоначально близкие точки распределяются с равной вероятностью по всем возможным интервалам.

Качественно данная задача в области топливно-энергетических ресурсов выглядит следующим образом. Предположим, что наибольший положительный показатель Ляпунова  $l = K_0 > 0$  (энтропия Колмогорова) был 0,04 бит в год. Его мы определили из расхождения каких-либо двух выбранных траекторий. Это означает, что мы теряем 0,04 бит предсказательной мощности в оценке цен на топливно-энергетические ресурсы ежегодно при движении вперед [9]. Следовательно, если мы можем измерить текущие условия с точностью до одного бита, то эта информация станет бесполезной после 1/0,04, или 25 дней. Таким образом, наибольшие показатели Ляпунова говорят нам о том, насколько относительно наши предсказания на будущий период

времени. При этом нам неизвестны уравнения движения, которые дают траектории движения, соответствующие эксперименту, а известны сами траектории (временные ряды) без управляющих параметров.

## 2. Динамика топливно-энергетических ресурсов

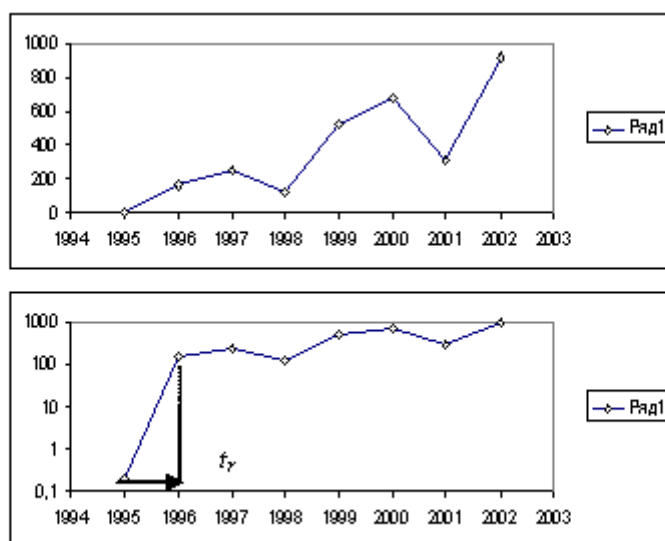
**Глубина прогноза.** Рассмотрим цены на бензин (кривая 1) и дизельное топливо (кривая 2) в РФ в 1995–2002 гг. (рис. 2). Единица измерения руб/т. Прибавим к ценам на дизельное топливо некоторое постоянное значение (+447 руб/т), так чтобы начальные значения цен в 1995 году совпали с точностью до  $m_0 = \delta y_0 = 0,2$  руб/т. Тем самым в последнем случае мы выбрали порядок огрубления фазового пространства  $m_0$  для формулы (4). То, что к цене прибавлялось некоторое постоянное число, означает, что рассматривается цена не одной тонны дизельного топлива, а цена некоторого большего значения, а именно 1367 кг.



**Рис. 2.** Цены на бензин (1) и дизельное топливо (2) в РФ в 1995–2002 гг.  
Единица измерения руб/т

Проследим за временной динамикой расстояния между ценами, которая представлена на рис. 3. Рис. 3, а представлен в линейной шкале цен, рис. 3, б — в логарифмической.

*Первый вывод*, который может быть сделан из такого рассмотрения, — первоначально близкая разница в ценах к концу рассматриваемого временного периода меняется очень значительно, т. е. в сотни раз. *Второй вывод.* Система цен быстро забывает начальное условие и выходит на медленно меняющийся уровень цен. Этот выход осуществляется за время  $t_r$  (рис. 3, б). Возникают следующие вопросы. Можно ли распространить данный анализ на другие топливно-энергетические ресурсы, касаясь не только цен, но и объемов ресурсов? Влияют ли такие свойства на прогнозные оценки?



**Рис. 3.** Увеличение первоначально близкой разницы цен со временем.

За время  $t_r$  система выходит на медленно меняющийся уровень цен  $\bar{\delta y}$  :  
а — линейная шкала, б — логарифмическая шкала

Оказывается, именно такие задачи решаются в рамках методов нелинейной динамики с привлечением

показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова. Особенность такого рассмотрения — не сравнение фазовых траекторий, являющихся решениями какого-либо дифференциального уравнения, а сравнение реальных цен во времени на различные топливно-энергетические ресурсы.

Показатель Ляпунова должен быть вычислен по выражению (2), он соответствует наклону кривой на рис. 3, б. Рис. 3, б можно сравнить с рис. 1, в. Из такого сравнения следует, что для анализа нелинейной динамики цен и построения модели прогноза можно использовать показатели Ляпунова и энтропию Колмогорова. Для анализа важно, чтобы на интервале  $t_r$  имелось несколько точек. Последнее становится возможным, если от годовой статистики перейдем к квартальной, а еще лучше — месячной.

**Определение глубины прогноза по ценам. Электроэнергетика и уголь.** Как продолжение задачи, сформулированной выше, рассмотрим расхождение двух траекторий  $\delta y = |y_1 - y_2|$  по ценам на электроэнергию (руб/1000 кВт·час) и уголь (руб/т). Одна траектория  $y_1$  соответствует ценам на электроэнергию, вторая  $y_2$  — ценам на уголь;  $t_r$  — время, за которое происходит перемешивание фазовых траекторий. За это время система забывает начальные условия и выходит на плавно возрастающий уровень расхождения цен.

Наклонная линия 1 на рис. 4 соответствует кривой  $\delta y = \delta y_0 e^{\lambda_1 t}$ ,  $\lambda_1$  — показатель Ляпунова (подбирался с учетом экспериментальных значений). Теоретическое время  $t_{r1}$  определялось по формуле

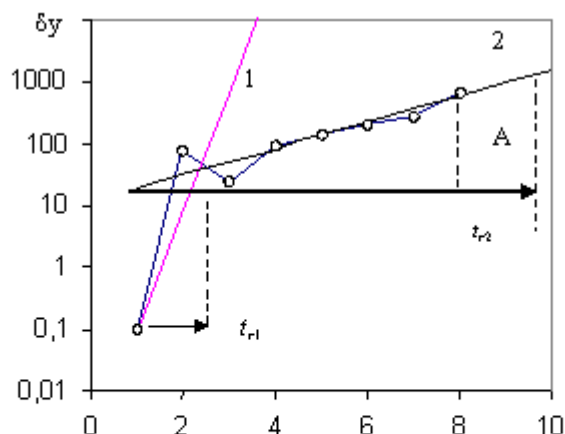
$$t_{r1} = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\overline{\delta y}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{4,69} \ln \left( \frac{100}{0,1} \right) \approx 1,47 \text{ года,}$$

что полностью соответствует времени, найденному из графика. Здесь энтропия Колмогорова определяется через положительный показатель Ляпунова

$K_0 = 1 > 0$ . За время  $t_{r1}$  система забывает начальные условия и выходит на плавно возрастающий уровень расхождения цен. Наклонная линия 2 — линия прогноза — на рис. 4 соответствует кривой  $\delta y = \delta y_0 e^{\lambda_2 t}$ ,  $\lambda_2$  — показатель Ляпунова (подбирался также с учетом экспериментальных значений). В результате теоретическое время  $t_{r2}$  определялось по формуле

$$t_{r2} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \left( \frac{\overline{\delta y}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{0,49} \ln \left( \frac{1000}{10} \right) \approx 9,39.$$

Наибольший показатель Ляпунова  $\lambda_1 = 4,69 > \lambda_2$ . Таким образом, достоверный прогноз соответствует наибольшему показателю Ляпунова и может осуществляться на ~1,5 года вперед. В третьем столбце табл. 1 указано число, которое прибавлялось к ценам по уголю для близкого совмещения начальных условий в 1995 году  $\delta x_0 = 0,1$ .



**Рис. 4.** Расхождение двух траекторий  $\delta y = |y_1 - y_2|$  по ценам

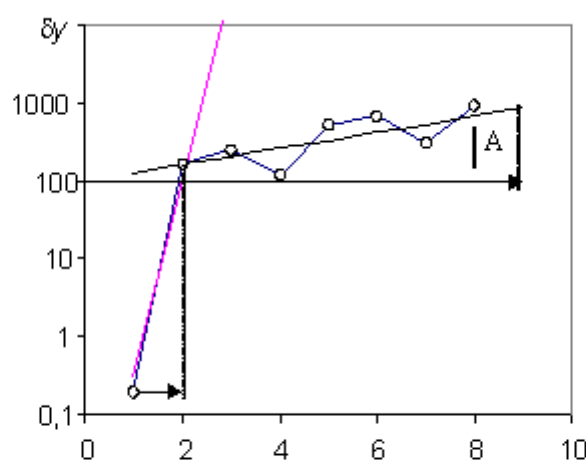
на электроэнергию (руб/1000 кВт·час) и уголь (руб/т):

Траектория  $y_1$  — электроэнергия,  $y_2$  — уголь;  $t_{r1}$  — время, за которое происходит перемешивание фазовых траекторий на первоначальном этапе развития;  $t_{r2}$  — на последующем этапе развития; А — область достоверного прогноза по кривой (2)

Таблица 1

Год	Цена	Цена+С	Расстояние	Тренд 1	Тренд 2
1995	146,7	146,8	0,1	0,08646	19,5231
1996	193,5	269,6	76,1	7,47561	31,7627
1997	204,4	228,6	24,2	646,353	51,6757
1998	215,1	307,3	92,2	55884,7	84,0726
1999	282	421,6	139,6	4831884	136,78
2000	416	618,4	202,4	4,2E+08	222,531
2001	538	817,6	279,6	3,6E+10	362,042
2002	673,75		673,75	3,1E+12	589,016
		+11,2		2,7E+14	958,287
				2,3E+16	1559,06

**Автомобильный бензин и уголь.** По аналогии рассматривались цены на автомобильный бензин и уголь (рис. 5).



**Рис. 5.** Расхождение двух траекторий  $\delta y = |y_1 - y_2|$  по ценам на автомобильный бензин и дизельное топливо (руб/т) по годам

Траектория  $y_1$  соответствует ценам на бензин,  $y_2$  — ценам на дизельное топливо;  $t_{r1}$  — время, за которое происходит перемешивание фазовых траекторий за короткий первоначальный период. За это время система забывает начальные условия и выходит на плавно возрастающий уровень расхождения цен. В таком анализе  $t_{r2}$  — время, за которое происходит перемешивание фазовых траекторий на последующем этапе:

$$t_{r1} = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \frac{\delta y}{\mu_0} \right) = \frac{1}{5,8} \ln \left( \frac{100}{0,2} \right) \approx 10,7;$$

$$t_{r2} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \left( \frac{\delta y}{\mu_0} \right) = \frac{1}{0,24} \ln \left( \frac{1000}{100} \right) \approx 9,59.$$

Прогноз определяется наибольшим показателем Ляпунова  $\lambda_1 = 5,8 > \lambda_1$ . Время достоверного прогноза 1 год. Он указывает на дальнейшее повышение цен на бензин и дизельное топливо. В третьем столбце табл. 2 указано число, которое прибавлялось к ценам на дизельное топливо для близкого совмещения начальных условий в 1995 году  $\delta x_0 = 0,2$ .

Таблица 2

Год	Цена	Цена+С	Расстояние	Тренд 1	Тренд 2
1995	1663	1663,2	0,2	127,144	0,31762
1996	1824	1986	162	161,656	100,883
1997	2022	2270,4	248,4	205,537	32042,7

1998	1963,5	2085	121,5	261,328	1E+07
1999	5509,5	6032	522,5	332,264	3,2E+09
2000	7739,6	8418	678,4	422,454	1E+12
2001	7305,6	7612,5	306,9	537,125	3,3E+14
2002	6979,4	7896,48	917,08	682,924	1E+17
2003		+447		868,298	3,3E+19
				1103,99	1E+22

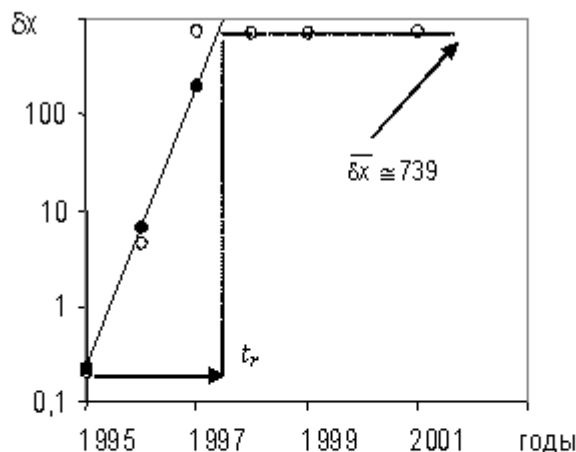
**Определение глубины прогноза по другим характеристикам.** Рассматривалось расхождение двух траекторий  $\delta x = |x_1 - x_2|$  энергоресурсов топливно-энергетического баланса России (миллионов тонн условного топлива). Одна траектория  $x_1$  соответствует природному топливу, вторая  $x_2$  — всего энергоресурсов;  $t_r$  — время, за которое происходит перемешивание фазовых траекторий.

В третьем столбце табл. 3 указано число, которое отнималось от показателя «всего энергоресурсов» для близкого совмещения начальных условий в 1995 году  $\delta x_0 = 0,2$ .

Наклонная линия соответствует кривой  $\delta x = \delta x_0 e^{\lambda t}$ ,  $\lambda$  — показатель Ляпунова (подбирался с учетом экспериментальных значений). Теоретическое время  $t_r$  определялось по формуле

$$t_r = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\bar{\delta x}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{3,4} \ln \left( \frac{739}{0,2} \right) \approx 2,41 \text{ года,}$$

что полностью соответствует времени, найденному из графика.



**Рис. 6.** Расхождение двух траекторий  $\delta x = |x_1 - x_2|$  энергоресурсов топливно-энергетического баланса России (миллионов тонн условного топлива). Траектория  $x_1$  — природное топливо,  $x_2$  — всего энергоресурсов;  $t_r$  — время, за которое происходит перемешивание фазовых траекторий. За это время система забывает начальные условия и выходит на средний уровень расхождения  $\bar{\delta x} = 739$

Таблица 3

Год	Цена	Цена+С	Расстояние	Тренд 1
1995	1315,1	1315,3	0,2	0,23
1996	1304,4	1309	4,6	6,906565
1997	1268,1	2009,1	741	207,3941
1998	1276,9	1995	718,1	6227,743
1999	1292,9	2023,9	731	187010
2000	1310			5615639
2001	1357,1	2125,1	768	1,69E+08

Таким образом, область достоверного прогноза по наибольшему показателю Ляпунова — не более двух с половиной лет. К числу основных недостатков такого анализа следует отнести наличие большого (годового) временного интервала между двумя последовательными состояниями. Наш анализ существенно улучшится, если использовать квартальные (или месячные) интервалы. К сожалению, они нам неизвестны.

### 3. Хаотические свойства курсов валют

Одни экономисты считают валютный рынок полностью детерминированным, другие полагают, что он ведет себя совершенно хаотически. Подход, который излагается в данной работе, сочетает в себе особенности как классического детерминистского, так и хаотического описаний поведения рынка [10]. Детерминизм проявляется в существовании трендов, отражающих глобальный порядок, а хаотичность — в наличии локального беспорядка. Их сочетание в реальной жизни всегда кажется непознанным, а потому и непредсказуемыми для большинства являются скачки курсов основных валют, так же как и других макроэкономических переменных. Особенно важно это для экономик регионов, обладающих мощными топливно-энергетическими ресурсами, открытыми относительно внешних связей.

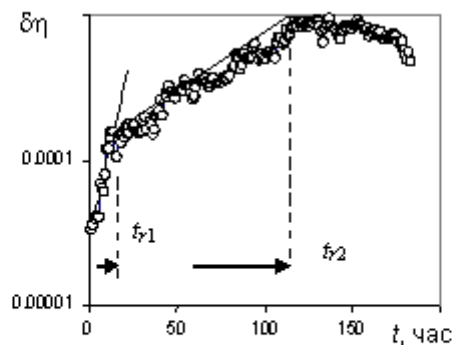
Цель этого раздела — продемонстрировать возможность применения методов нелинейной динамики к анализу хаотических состояний валютного рынка, следуя работе [10]. Для анализа мы использовали временные зависимости фунта относительно доллара и евровалюты для одного и того же интервала времени, начиная с 6 января 2004 года. Особенность этих временных рядов заключена в том, что временной интервал предоставления курсов — один час.

Здесь не предлагается описание новых торговых стратегий по покупке или продаже валюты или способов надежного прогнозирования валютных рынков, за исключением тех моментов, которые касаются определения времени прогнозирования. Определение времени прогнозирования, установление количественных критериев определенности состояния системы по анализу временных рядов — это то существенно новое, что привносится в экономическую теорию нелинейной динамикой.

**Время достоверного прогноза.** Две траектории курсов валют, близкие друг к другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, должны экспоненциально расходиться за малое в среднем время, если исходить из того, что рынки валют хаотичны.

Является ли совместная система четырех валют (*евровалюты, фунта и рубля относительно доллара*) системой с *перемешиванием* [4], если с течением времени ( $t_i$ ) информация о начальных условиях в них полностью утрачивается? О перемешивании мы судим, как это следует из предыдущего материала, по наибольшему показателю Ляпунова.

Здесь, как и выше, использован метод совмещения траекторий по начальному значению. Полученный ряд является частью хаотического аттрактора. Из рис. 7 следует, что в рассматриваемой системе двух валют (*евро и фунт*) можно выделить два характерных наклона относительно шкалы времени: первый наклон соответствует времени  $t_{i1}$  час, второй —  $t_{i2}$ .



**Рис. 7.** Увеличение первоначально близкой разницы курсов фунта и евровалюты со временем для начального момента времени 06.01.2004 г. График соответствует 183 ч непрерывного наблюдения

Максимальное расстояние  $d_h$  ограничено размерами аттрактора, чем и объясняется насыщение, наблюдаемое в конце недельного цикла. Как известно, ожидание определяет «степень разогретости» рынка [6], в то время как формирующиеся ценности в силу конечного капитала определяют ограниченность описываемого аттрактора.

Наибольший показатель Ляпунова в этом случае равен  $l_1 = 0,12$ , и время достоверного прогнозирования, как это следует из графика, равно  $t_{i1} \sim 14$  ч, т. е. соизмеримо с дневным временем продаж. За это время рассматриваемая система забывает начальные условия и выходит на плавно возрастающий уровень разницы курса валют; последнее время равно  $t_{i2} \sim 100$  ч. Это время соизмеримо с периодом

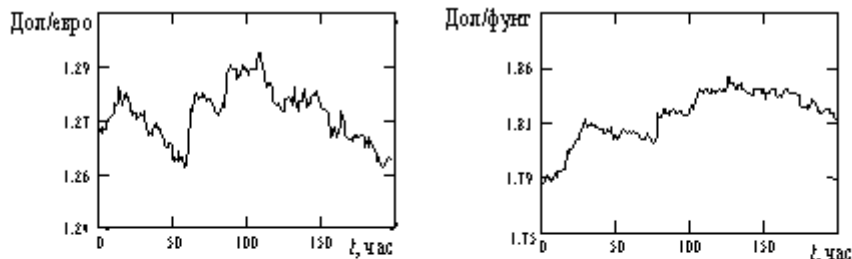


еженедельного (или близкого к нему десятидневного) цикла продаж. Эти выводы, полученные методами нелинейной динамики, отражают реальную ситуацию на торгах валют, когда покупателями и продавцами игра строится по дневному и недельному (десятидневному) циклам.

Эти примеры по валюте, в отличие от приведенных примеров цен на топливо, гораздо полнее отражают достоверность расчетных данных, так как даны с шагом 1 час, а не 1 год, что приводит к определению более обоснованных временных трендов.

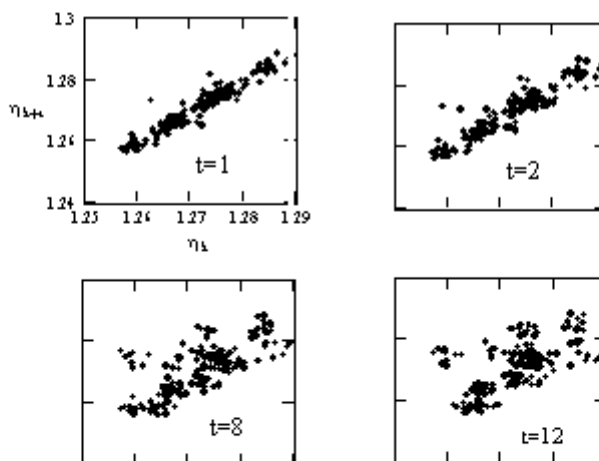
**Корреляционная размерность валютных аттракторов. Евровалюта.** Использование фрактального подхода к экономическим системам позволяет количественно охарактеризовать такие взаимосвязанные свойства систем, как тенденцию развития и самоподобие структуры экономических отношений [11].

При помощи метода временных задержек может быть получена двумерная фазовая картина хаотических пульсаций курса валюты  $h_k$  в координатах  $(h_{k+t}, h_k)$  (рис. 9), соответствующая динамике рис. 8.



**Рис. 8.** Динамика евровалюты относительно доллара за 200 ч, начиная с часу дня 06.01.2004, фунта относительно доллара.

Всякое прогнозирование для  $t > t_0$  по трендам бессмысленно с точки зрения нелинейной динамики, так как курсы валют являются системами с перемешиванием



**Рис. 9.** Двумерный фазовый портрет хаотических пульсаций евровалюты  $(h_{k+t}, h_k)$  относительно доллара за 200 ч, начиная с часу дня 06.01.2004. Время  $t$  означает различные времена рассматривания (задержки)

Псевдофазовые портреты (рис. 9) говорят о том, что несмотря на хаотический характер пульсаций каждое последующее значение цены (через  $t = 1, 2, 8, 12$  ч) на торговых сессиях зависит от предыдущего, причем с увеличением временной задержки  $t$  корреляционная близкая к линии зависимость расплывается все более и более. При разработке тактики покупки и продажи валюты в практической деятельности последний результат следует учитывать в полной мере. Будем вычислять не хаусдорфову размерность аттрактора [9], определение которой можно найти, например, в [10, 11], а *корреляционную размерность*, которая сходится быстрее и ограничивает хаусдорфову размерность снизу. Вследствие чувствительной зависимости от начальных условий временная корреляция между пульсациями скорости отсутствует. Однако существует пространственная корреляция, которую можно охарактеризовать с помощью какой-либо функции. Как выбрать эту функцию?

Рассмотрим множество точек на плоскости, представляющее собой двумерное фазовое пространство в координатах  $(h_i, h_{i+t})$ , где  $h_i$  — курс валюты в момент времени  $i$ . Пусть  $N(r)$  — число точек этого множества, расположенных внутри окружности радиусом  $r$ . Если в качестве  $\vec{r}_i$  обозначить радиус-вектор точки с координатами  $(h_i, h_{i+t})$ , то характеристикой пространственной корреляции, согласно работе [5], можно выбрать функцию

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - |\tilde{\eta}_i - \tilde{\eta}_j|).$$

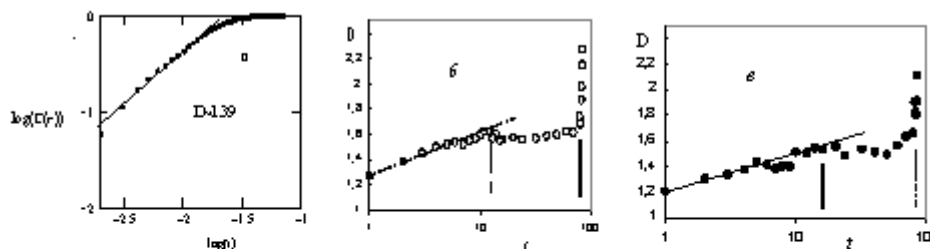
Здесь  $N$  — общее количество точек;  $H$  — функция Хевисайда, равная по определению единице при положительных значениях аргумента и нулю при остальных значениях. Тогда в некоторой ограниченной области параметра  $r$  будет выполняться степенной закон

$$C(r) \sim r^D,$$

в котором показатель степени  $D$  равен корреляционной размерности аттрактора [1]. Следует отметить, что применимость степенного закона справедлива не во всем диапазоне изменения  $r$ . При малых  $r$  число пар точек, расстояние между которыми меньше  $r$ , мало, поскольку число точек на аттракторе ограничено, и статистика становится бедной.

С увеличением времени рассмотрения  $t$  фазовый портрет расплывается, это означает, что корреляция в форме, близкой к линии, исчезает, т. е. неопределенность состояния данной валюты увеличивается. Поэтому при установлении определенности или неопределенности состояния курса валюты следует говорить о корреляционной размерности, промежуточной между топологической размерностью линии ( $D = 1$ ) и плоскости ( $D = 2$ ). Эту размерность нам следует вычислить. Большое рассеяние означает, что существует высокая вероятность больших колебаний прибыли от покупки и продажи валют. Следует согласиться, что такая валюта обладает высоким уровнем риска. Многочисленными исследованиями установлено, что распределение прибылей от продажи валюты не следует нормальному распределению, поэтому стандартное отклонение как мера сравнения риска ставится под вопрос [9, 10].

Когда величина  $r$  становится сравнимой с размером аттрактора, величина  $C(r)$  достигает насыщения, поскольку тогда начинают учитываться все  $N$  точек [6]. Зависимость функции  $\log(C(r))$  от  $\log(r)$  представлена на рис. 10, а. По тангенсу угла наклона касательной к этому графику определялась корреляционная размерность  $D$ . Численные расчеты показали, например, что для  $N \sim 200$  точек при времени задержки  $t = 2$  корреляционная размерность равна  $D \sim 1,39$ , т. е. является промежуточной между 1 и 2. Графики, представленные на рис. 9, служат базовыми данными для нахождения характеристик, необходимых для определения рынков как нелинейных динамических систем и их понимания. Каждая цена валюты соотносится с ценой предшествующей, что является нарушением гауссовского линейного анализа.



**Рис. 10.** Зависимость функции  $C(r)$  от  $r$  в двойном логарифмическом масштабе при времени задержки  $t = 2$  ч для евровалюты относительно доллара (а).

Тангенс угла наклона касательной к этой зависимости соответствует корреляционной размерности  $D$ ; зависимость  $D$  от времени задержки  $t$  (б). Выделенная точка на рисунке б соответствует рисунку а; в — зависимость корреляционной размерности  $D$  от времени для фунта относительно доллара для того же временного периода, что и для евровалюты и для одного и того же интервала времени

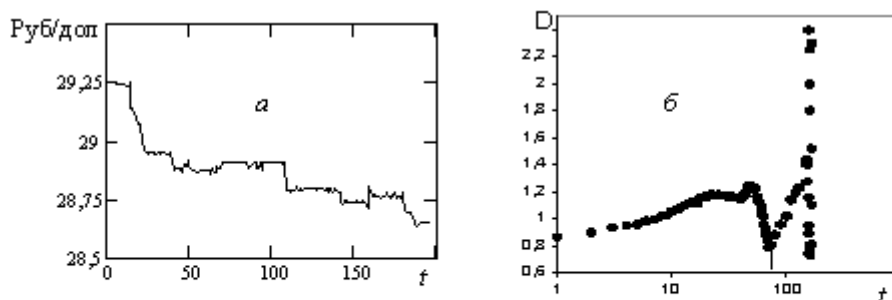
Из численного анализа временного ряда следует, что можно выделить два цикла — ежедневный, равный  $t \sim 12$  ч и недельный  $t \sim 84$  ч, в то время как в самом ряде визуально такие характерные времена никак не выделяются. За один день продаж корреляционная размерность меняется, возрастая с каждым часом от  $D @ 1,29$  до  $D @ 1,6$ , что говорит об уменьшении определенности к концу дня, т. е. об увеличении риска. По прошествии недельного цикла размерность резко возрастает, проходя топологическую размерность 2, что свидетельствует об исчезновении корреляции, близкой к линейной, и дальнейшем уменьшении определенности в конце каждого месяца.

**Фунт против доллара.** На рис. 10, б представлена зависимость корреляционной размерности  $D$  для фунта относительно доллара от времени задержки  $t$ . Выделенная точка на рисунке б соответствует рисунку а. Рис. 10, б следует сравнить с рис. 10, в. Оказалось, что за рассматриваемый период все значения размерности для фунта меньше аналогичных для евровалюты на 8 %, т. е. определенность состояния фунта выше, чем евро на эту же величину.

Здесь также в течение ежедневного цикла  $t \sim 12$  ч корреляционная размерность меняется, возрастая с каждым часом от  $D @ 1,2$  до  $D @ 1,6$ . Последнее соответствует увеличению риска. По прошествии недельного цикла  $t \sim 84$  ч размерность, так же как и у евровалюты, резко возрастает, проходя топологическую размерность 2, в этом случае риск максимален. Здесь следует учитывать результаты, когда фрактальная размерность изменяется от 1 до 2, поскольку мы имеем дело с единственной переменной. На языке нелинейной динамики это — низкоразмерный аттрактор.

Таким образом, фрактальные временные ряды имеют статистическое самоподобие во времени, которое может быть явно определено. В отличие от [9] фиксируются две естественные временные «длины» обеих курсов — дневного и недельного. Следует отметить, что частота предоставления статистических данных повышает информативность временных рядов. Функция долговременной памяти обуславливает информационное влияние в течение больших периодов времени и сказывается по отношению к любому временному масштабу [9]. Все дневные периоды влияют на все последующие дневные. Все недельные периоды влияют на все последующие недельные и т. д. Это влияние ослабевает со временем, однако медленнее, чем кратковременные зависимости. Действительно, дневной цикл определяет наибольший показатель Ляпунова и на нем теряется память о начальных условиях, недельный цикл уже характеризуется меньшим значением показателя Ляпунова, ситуация резко меняется к концу недельного цикла — корреляционная размерность скачком (сингулярно) возрастает.

Аналогичные расчеты были выполнены и для рубля относительно доллара (рис. 11). Поведение фрактальной размерности для этого временного ряда характеризуется в некоторых временных интервалах размерностью, меньшей единицы. Последнее указывает уже не на линейные, а на точечные корреляции каждого последующего значения курса с предыдущим на псевдофазовом портрете. Можно выявить несколько циклов, один из которых является недельным, второй — двухнедельным. Размерность растет непрерывно в недельном интервале от 0,8 до 1,25. Однако в конце этого цикла, в отличие от *фунта* и *евро*, размерность резко снижается, а затем также возрастает вплоть до характерного двухнедельного цикла в  $\sim 168$  ч, по окончании которого наблюдается сингулярность.



**Рис. 11.** Динамика рубля относительно доллара за 200 ч, начиная с часу дня 06.01.2004 (а). Зависимость корреляционной размерности  $D$  от времени для рубля относительно доллара для того же временного периода, что и для евровалюты (б)

Математически изменения фрактальных курсов можно описать следующим образом. Фрактальная размерность курсов валют с каждым часом продаж в течение дня, как правило, нелинейно растет во времени по закону

$$D = D_1 + e(t),$$

где  $D_1$  — фрактальная размерность при времени задержки  $t = 1$  ч;  $e(t)$  — нелинейная функция времени, которая может быть определена обработкой по рис. 10, б, в. Временная зависимость  $D$  обусловлена скоростью изменения  $e(t)$ :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{de}{dt}$$

Скорость изменения фрактальной размерности как раз и определяет формально величину этой «движущей силы» рынка валюты

$$F_{\Phi P} = -\frac{de}{dt}$$

В различные периоды цикличности величина этой силы и ее воздействие различно.

Способ заполнения объектом временного ряда определяется теми силами, которые влияют на его формирование. Для временных рядов цен — это микро- и макроэкономические факторы, влияющие на ожидания покупателей и продавцов. Валютные рынки (как и рынки энергоресурсов) характеризуются внезапными изменениями, идущими вслед за интервенциями центрального банка — попытками правительства управлять курсом соответствующей валюты в противовес естественным рыночным силам.

### Заключение

В этой статье рассмотрены вопросы существования хаоса в анализе некоторых показателей в макроэкономических системах. Наиболее наглядные примеры хаоса на практике можно обнаружить в динамике таких показателей, как цены на энергоресурсы и курсы различных валют. Анализ нелинейной динамики по курсам валют более достоверен, чем по ценам на энергоресурсы, так как он может быть представлен через один час, в отличие, например, от анализа по валовому продукту, который дается, как правило, годовым циклом.

В этом анализе используются современные методы. А. Эйнштейн подчеркивал, что «...приближение к более глубокому пониманию основных принципов физики связано со все более сложными математическими методами». Считается, что открытие хаоса создало новую парадигму экономического моделирования, которая не является простой. В последнее время обнаружены новые фундаментальные ограничения возможностей экономического прогнозирования, причем время прогнозирования, как это видно, может быть вычислено математически. В. Б. Занг подчеркивал [12], что хаос согласуется со значительной частью нашего ежедневного опыта в большей степени, чем точная предсказуемость. Предсказать будущее подобных систем возможно, но любое несоответствие в начальных условиях так быстро возрастает, что от прогноза практически ничего не остается. Поэтому не только в теории, но и в практической деятельности можно ввести время прогнозирования, которое вычисляется по наибольшему показателю Ляпунова.

Переменные в экономике чаще всего подвержены нерегулярным флуктуациям, в том числе связанным с иррациональной деятельностью менеджеров. Подобные явления детерминированы по своей природе и подчиняются определенным правилам, которые, тем не менее, не содержат элементы случайности. Для чисто случайных процессов, как это доказывается в нелинейной динамике, показатели Ляпунова стремятся к бесконечности.

В теории будущее предопределено прошлым, на практике с увеличением времени предсказания ухудшаются. Реально существующие статистические временные ряды в подобных системах могут изучаться, таким образом, без каких-либо ссылок на произвольно постулированные внешние воздействия. Это хорошо подтверждается анализом курса валют, который был продемонстрирован в этой статье. Рынки, в конечном счете, подвергаются влиянию плохо измеряемых сил.

Исследование частично финансировалось Институтом проблем освоения Севера СО РАН и грантами РГНФ-Урал 04-02-83204а/У и РФФИ 03-06-80079.

### Литература

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. С. 240.
2. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. С. 528.
3. Быстрай Г. П. Методы синергетики в анализе структурных сдвигов в промышленности: разработка унифицированных моделей и алгоритмов анализа устойчивости текущих состояний в условиях внешнего и внутреннего управления // Вестник кибернетики. Тюмень: Изд-во ИПСО СО РАН, 2003. Вып. 2. С. 71–88.
4. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. С. 270.
5. Bystrai G. P. Dynamic Chaos in Macroeconomics: The Problem of Formalized Description: Conf. «Evolutionary Econ. and Chaos Theory», Amsterdam, May 6–8, 1993. Amsterdam, 1993. P. 17–18.
6. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
7. Быстрай Г. П., Студенок С. И., Иванова С. И. Детерминированный хаос при фазовых переходах I рода в системе жидкость — пар // ТВТ. 2003. Т. 41, № 4. С. 579.
8. Быстрай Г. П. Детерминированный хаос при химических реакциях в межфазном слое при высоких температурах // ТВТ. 2004. Т. 42, № 1. С. 81.
9. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. М.: Мир, 2000.
10. Быстрай Г. П., Николаева Е. В., Журкина А. В. и др. Валютные рынки: математическое моделирование хаотических состояний. Препринт. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 63 с.
11. Федер И. Фракталы. М.: Мир, 1990.
12. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999.

*G. P. Bystraj, A. V. Kalinina, Yu. L. Solovyev, S. I. Studenok*

### *METHODS OF NONLINEAR DYNAMICS UNDER FORECASTING CHANGES OF CERTAIN INDICES IN FUEL POWER ENGINEERING*

*The paper is aimed at solving a problem of synthesizing algorithms to calculate time of «forgetting» the initial conditions by an economic system, subject to be taken into account when creating forecasting methods. The obtained maximum Lyapunov indices point to relative nature of future prognoses, let it be fuel prices or currency rates these energy resources are bought and sold at. Here, equations of motion giving paths to fit an experiment,*

*are unknown, what is known are paths (time series) themselves without control parameters. The authors quote specific calculation results regarding characteristics of random dynamics under investigation of development processes of fuel-and-energy resources in the Russian Federation as well as rates of different foreign exchange.*