А. Н. Паршуков

Схема синтеза модального регулятора пониженного порядка

Настоящая работа посвящена обоснованию схемы синтеза модального регулятора пониженного порядка. Отличие предлагаемой схемы от других заключается в том, что ограниченные регулировочные ресурсы управления затрачиваются на компенсацию «плохих» мод движения объекта с проверкой того, что «хорошие» (нерегулируемые) моды при вариации не нарушают целевого условия.

Постановка задачи

Практика построения промышленных систем регулирования в энергетике [6], нефтегазопромысловых технологиях [2] во многом опирается на стандартные структуры регуляторов, такие как П, ПИ и ПИД. В схемах модального управления структурные характеристики регулятора строго соответствуют структурному описанию объекта управления.

Однако если собственная динамика объекта управления допускает разделение на части с «хорошими» и «плохими» с точки зрения цели управления свойствами, то тратить ресурсы управления на коррекцию «хороших динамик» нет необходимости.

В настоящей работе предложена схема синтеза и анализа модального регулятора пониженного (заданного) порядка, связанная с компенсацией «плохих динамик» объекта.

Типовая процедура расчета параметров

$$\boldsymbol{\rho} = (\beta_0, \ldots, \beta_{l-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_q)^{\mathrm{T}}$$

регулятора R (см. обозначения работы Паршукова А. Н. и Соловьева И. Г. в данном сборнике)

$$\beta(l, p)\, u(t) = \alpha(q, p)\, x(t) + b^1(h, p)\, g(t), \quad \beta_l = 1, \quad q, h \le l, \qquad (1)$$

полного порядка $l = n - 1$, для объекта P

$$a(n, p)\, x(t) = b(m, p)\, u(t), \quad a_n = 1, \qquad (2)$$

сводится к решению системы алгебраических уравнений вида [4, с. 7–8]

$$C\,\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\text{Э}}, \qquad (3)$$

которая составляется из выражения для характеристического полинома (ХП) замкнутой системы управления для объекта (2) и регулятора (1)

$$a^{\text{Э}}(n + l, s) = a(n, s) \times \beta(l, s) - b(m, s) \times \alpha(q, s).$$

В общем случае [1, с. 217] качество управления в задаче модального управления назначается в виде односвязной области $\boldsymbol{\Sigma}$ ($\boldsymbol{\Sigma} \subset \mathbf{C}^1$), определяющей желаемое расположение корней полинома $a^{\text{Э}}(n + l, s)$. При этом целевое условие формально записывается в виде

$$\Lambda \subset \boldsymbol{\Sigma}, \qquad (4)$$

здесь Λ обозначено множество корней полинома $a^{\text{Э}}(n + l, s)$. При этом требование полного порядка регулятора зачастую излишне. Поясним последнее утверждение: будем говорить о трех ситуациях.

1. Корни полинома $a(n, s)$ уже принадлежат области желаемого расположения корней $\boldsymbol{\Sigma}$. В этом

случае $u(t) = b_{0}^{1}\, g(t)$ и потребности в регулировании нет.

2. Все корни полинома $a(n, s)$ не принадлежат области желаемого расположения корней $\boldsymbol{S}$. Регулировать следует все корни $a(n, s)$, что в общем случае обеспечивается полным порядком регулятора.

3. Более распространен промежуточный случай, когда только часть корней $a(n, s)$ принадлежит области $\boldsymbol{S}$. При этом естественно регулировать только те корни объекта, которые не удовлетворяют требуемому качеству управления, а «хорошие» — не трогать. В связи с этим в настоящей работе рассматривается следующая задача.

Для объекта (2) и целевого условия (4) регулятор R ищется на пониженном порядке l ($l < n - 1$). В настоящей работе предлагается синтезировать регулятор R из условия

$$e(n-1-l, s) \times \hat{a}^{\text{э}}(2l+1, s) = a(n, s) \times \mathrm{b}(l, s) - b(m, s) \times \mathrm{a}(q, s), \qquad (5)$$

здесь оператор $\hat{a}^{\text{э}}(2l+1, p)$, $\hat{a}^{\text{э}}_{2l+1} = 1$ средствами настройки регулятора может быть обеспечен наперед заданным образом[1], а «выпадающая часть» — оператор $e(n-1-l, p)$, $e_{n-1-l} = 1$ учитывает вклад «хороших динамик» объекта и потому не регулируется.

В этом случае суть задачи синтеза состоит в поиске таких настроек регулятора R, которые обеспечивали бы наперед выбранный оператор $\hat{a}^{\text{э}}(2l+1, p)$. В матричном виде расчетная схема (5) принимает вид

$$(C \mid -\hat{A}^{\text{э}}) \cdot (\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{e})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{b} = T \cdot \hat{\boldsymbol{a}}^{\text{э}}, \qquad (6)$$

здесь C, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r}$ — те, что и в (3); $\boldsymbol{e}$ — вектор, составленный из коэффициентов оператора $e^{0}(n-1-l, p)$:

$$\boldsymbol{e} = (e_0, \ldots, e_{n-l-2})^{\mathrm{T}};$$

$\hat{A}^{\text{э}}$ и $\hat{\boldsymbol{a}}^{\text{э}}$ — соответственно матрица и вектор, составленные из коэффициентов оператора $\hat{a}^{\text{э}}(2l+1, p)$:

$$\hat{\boldsymbol{a}}^{\text{э}} = (\hat{a}^{\text{э}}_0, \ldots, \hat{a}^{\text{э}}_{2l})^{\mathrm{T}}, \qquad T = \underbrace{\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline I \end{array}\right)}_{2l+1} \Big\}\, n+l, \qquad \hat{A}^{\text{э}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{a}^{\text{э}}_0 & & 0 \\ \vdots & & \\ \hat{a}^{\text{э}}_{2l} & & \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & \hat{a}^{\text{э}}_0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & \hat{a}^{\text{э}}_{2l} \end{pmatrix}}_{n-l-1} \Bigg\}\, n+l$$

здесь I — единичная матрица соответствующей размерности.

Следует заметить, что, замыкая объект (1) упрощенным регулятором, мы смещаем не только «плохие», но и «хорошие» корни объекта. И в результате синтеза регулятора R по схеме (5) корни «выпадающей» части $e(n-1-l, s)$ могут выходить за пределы области $\boldsymbol{S}$. При этом имеющейся свободой в выборе корней $\hat{a}^{\text{э}}(2l+1, s)$, доставляемых условием (4), естественно воспользоваться с тем, чтобы вогнать смещенные корни «выпадающей» части в заданную область $\boldsymbol{S}$.

В условиях, когда допуски на операторы $\hat{a}^{\text{э}}(2l+1, p)$ и $e(n-1-l, p)$ заданы интервальными множествами

$$\boldsymbol{\hat{A}}^{Э}(2l+1,p)=\{(\hat{a}_{0}^{0}+\mathrm{d}\,\hat{a}_{0}^{0})+\ldots+(\hat{a}_{2l}^{0}+\mathrm{d}\,\hat{a}_{2l}^{0})\,p^{2l}+p^{2l+1}, \qquad (7)$$

$$\mathrm{d}\,\hat{a}_{i}^{0}\ Î\ [\text{-}\mathrm{D}\hat{a}_{i}^{0};\ \mathrm{D}\hat{a}_{i}^{0}]\ Ì\ \boldsymbol{R}^{1},\quad i=\overline{0,2l}\ \},$$

где как $\mathrm{D}\hat{a}_{i}^{0}$ обозначены границы интервала допустимых вариаций коэффициента $\hat{a}_{i}^{0}$ и

$$\boldsymbol{E}(n-1-l,p)=\{(e_{0}^{0}+\mathrm{d}\,e_{0})+\ldots+(e_{n-2-l}^{0}+\mathrm{d}\,e_{n-2-l})\,p^{n-2-l}+p^{n-1-l}, \qquad (8)$$

$$\mathrm{d}\,e_{i}\ Î\ [\text{-}\mathrm{D}\,e_{i};\ \mathrm{D}e_{i}]\ Ì\ \boldsymbol{R}^{1},\quad i=\overline{0,n-2-l}\ \},$$

здесь $\mathrm{D}e_{i}$ обозначены границы интервала допустимых вариаций коэффициента e_{i}, данную задачу можно формализовать в следующем виде.

Требуется найти $\hat{a}^{Э}(2l+1,p)$ такой, что

$$J=\|\boldsymbol{e}-\boldsymbol{e}^{0}\|^{2}\ ®\ \min_{\hat{a}^{Э}(2l+1,p)\in\hat{A}^{Э}(2l+1,p)}, \qquad (9)$$

где вектор $\boldsymbol{e}$ из (6), а как $\boldsymbol{e}^{0}$ обозначен соответствующий вектор, составленный из коэффициентов «среднего» оператора $e^{0}(n-1-l,p)$ из допустимого множества (8).

В (9) вектора $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}^{0}$ явно не могут быть выражены через коэффициенты соответствующих им операторов $\hat{a}^{Э}(2l+1,p)$, а значит, данную экстремальную задачу не удается решить аналитически. В настоящей работе предлагается итеративная схема решения данной задачи.

Основной результат. Итеративная схема решения экстремальной задачи (9)

Пусть на k-й итерации согласно (6) выполнено

$$(C\,|\,\text{-}\hat{A}^{Э}(k))\cdot(\boldsymbol{r}(k)\,|\,\boldsymbol{e}(k))^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}=T\cdot\boldsymbol{\hat{a}}^{Э}(k). \qquad (10)$$

Новый вектор настроек $\boldsymbol{\hat{a}}^{Э}(k+1)$ будем искать в виде

$$\boldsymbol{\hat{a}}^{Э}(k+1)=\boldsymbol{\hat{a}}^{Э}(k)+\mathrm{d}\,\boldsymbol{\hat{a}}^{Э}(k), \qquad (11)$$

такой, что выполняются условия

$$J(k+1)<J(k)$$

и

$$\boldsymbol{\hat{a}}^{Э}(k+1)\ Î\ \boldsymbol{\hat{A}}^{Э},$$

где $\boldsymbol{\hat{A}}^{Э}$ — область допустимых эталонных настроек из (7).

Вектору (11) сопоставим векторы

$$\boldsymbol{e}(k+1)=\boldsymbol{e}(k)+\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}(k) \qquad (12)$$

и

$$\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{r}(k) + \mathrm{d}\,\mathbf{r}(k). \qquad (13)$$

После подстановки (11), (12), (13) в (10), пренебрегая квадратичными членами приращений, получаем расчетное выражение

$$C \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{r}(k) - \mathrm{d}\,\hat{A}^{э}(k) \cdot \mathbf{e}(k) - \hat{A}^{э}(k) \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{e}(k) - T \cdot \mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) = 0$$

или в компактном виде

$$(\mathrm{d}\,\mathbf{r}(k) \mid \mathrm{d}\,\mathbf{e}(k))^{\mathrm{T}} = (H_1(k) \mid H_2(k))^{\mathrm{T}} \cdot (E(k) \cdot \mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) + L \cdot \mathbf{e}(k) + T \cdot \mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k)), \quad (14)$$

где принято

$$(C \mid \hat{A}^{э}(k))^{-1} = \begin{pmatrix} H_1(k) \\ \hline H_2(k) \end{pmatrix},$$

а вектор — столбец $\mathrm{d}\,\hat{A}^{э}(k) \cdot \mathbf{e}(k)$ представлен в виде $E(k) \cdot \mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) + L \cdot \mathbf{e}(k)$ с матрицами

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \hline I \end{pmatrix}}_{n-l-1}\Big\}{\scriptstyle n+l}, \qquad E(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} e_0(k) & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n-l-2}(k) & & 0 \\ 0 & \ddots & e_0(k) \\ & & \vdots \\ & & e_{n-l-2}(k) \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{2l+1}\Bigg\}{\scriptstyle n+l}$$

Выделив из (14) выражение для $\mathrm{d}\,\mathbf{e}(k)$ и подставив его с учетом (12) в критерий (9), приходим к типовой задаче квадратичной минимизации с интервальными ограничениями

$$J(k+1) = \| D(k) \cdot \mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) - \mathbf{v}(k+1) \|^2 \to \min_{\hat{\mathbf{a}}^{э}(k)+\mathrm{d}\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) \in \hat{A}^{э}},$$

где

$$D(k) = H_2(k) \cdot E(k) + T, \quad \mathbf{v}(k+1) = \mathbf{e}^0 - (I - H_2(k) \cdot L)\,\mathbf{e}(k).$$

Численная процедура решения полученной задачи методом проекции градиента [5, с. 202–210] имеет вид

$$\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k+1) = \mathrm{Pr}_{A'}\,(\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) - \gamma(k)\,\mathbf{q}(k)),$$

где

$$\gamma(k) = \arg\min_{\gamma} J(\mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) - \gamma(k)\,\mathbf{q}(k)), \qquad \mathbf{q}(k) = D^{\mathrm{T}}(k) \cdot (D(k) \cdot \mathrm{d}\,\hat{\mathbf{a}}^{э}(k) - \mathbf{v}(k+1)),$$

а $\mathrm{Pr}_{A'}(\mathbf{c})$ — есть функция проецирования вектора $\mathbf{c}$ на интервальное множество $\hat{\mathbf{A}}^{э}$ из (7).

Заключение

Задача понижения порядка регулятора относится к классическим задачам теории автоматического управления. Наиболее близкое отношение к этой тематике имеют методы упрощенного описания (*редуцирования*) объекта моделями пониженного порядка, с последующим расчетом по ним регуляторов, к типовым схемам редуцирования относятся метод разделения движений [3], метод цепных дробей [7] и многие другие; при этом очевидно, что понижение порядка объекта приводит к понижению и порядка регулятора. Заметим, что указанные методы обладают следующим общим недостатком: в них не анализируется состоятельность результатов синтеза на полном порядке объекта.

В настоящей работе предложена методика расчета и последующей коррекции параметров модального регулятора с учетом целевых условий.

Литература

1. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.

2. *Ведерников В. А., Лысова О. А.* Оптимизация системы электропривода погружного насоса // Нефть и газ. 2002. Т. 5. С. 88–94.

3. *Геращенко Е. И., Геращенко С. М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975. 296 с.

4. *Паршуков А. Н.* Схема синтеза модального регулятора пониженного порядка / Ин-т криосферы Земли СО РАН. Тюмень, 2001. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 31.08.2001, № 1920.

5. *Реклейтис Г.*, *Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. М.: Мир, 1986. Т. 1. С. 202–210.

6. *Ротач В. Я.* Теория автоматического управления теплоэнергетическими процес-сами. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 87.

7. *Resende R., Silva V. V. R.* On the model order reduction of linear multivariable systems using a block — Schwarz realization // 11th IFAC World Congress. Tallinn, USSR. 1990.

---

[1] Здесь и далее предполагается, что корни $\hat{a}^{Э}(2l + 1, s)$ принадлежат области $\boldsymbol{S}$.

A. N. Parshukov

A SYNTHESIS PATTERN WITH RESPECT TO A MODAL REGULATOR OF DESCENDING ORDER

The present paper describes a synthesis pattern with respect to a modal regulator of descending order. A distinct feature of the suggested pattern in comparison with others lies in the fact that limited regulator control resources are spent to compensate «poor» modes in the object's motion, while checking that «good» (non-regulated) modes do not break a target condition during variation.