Автоматизация нефтегазовых технологий

А. Н. Паршуков, И. Г. Соловьев

Технология формирования семейства модальных регуляторов, обеспечивающих предписанное качество управления

Рассматривается новая задача — формирование семейства модальных регуляторов с эллиптической зоной настроек параметров, обеспечивающих предписанное качество управления. Предлагается вычислительная технология формирования такого семейства регуляторов.

Постановка задачи

При управлении технологическими процессами в нефтегазовой промышленности задачи управления нередко характеризуются, с одной стороны, нечеткостью задания модели объекта, с другой — многовариантностью требований, предъявляемых к замкнутой системе управления из инженерных соображений. В этой ситуации желательно иметь некоторый набор решений задачи управления, из которых выбирать подходящее; такой подход широко применяется в нефтегазопромысловых технологиях [2].

В настоящей работе рассматривается задача формирования семейства модальных регуляторов. Поясним суть рассматриваемой задачи.

Если целевое условие в задаче модального управления [3] назначается областью желаемого расположения корней характеристического полинома (ХП), то имеющиеся свободы выбора эталонных операторов допускают расчет множественного регулятора с некоторой областью настроек его параметров. Суть классической схемы синтеза сводится к расчету одного регулятора из указанного семейства.

Настоящая работа посвящена вычислительной технологии формирования семейства регуляторов с эллиптической зоной настроек параметров, обеспечивающих предписанное качество управления. Такое множество может быть полезно для решения многих теоретических и практических задач, например для установления границ вариаций параметров регулятора, при которых гарантированно выполняется целевое условие.

Используя обозначения [4], дадим краткие пояснения исследуемым вопросам.

Пусть объект управления P задается в виде [4][1]

$$a\,(n, p)\,x(t) = b\,(m, p)\,u\,(t), \qquad a_n = 1, \qquad (1)$$

где a_n — коэффициент при старшей степени оператора $a\,(n, p)$.

В классической постановке задачи синтеза модального регулятора [5, с. 9–11] желаемые динамические свойства задаются эталонным оператором $a^э\,(n + l, p)$, $a^э_{n+l} = 1$, являющимся характеристическим полиномом (ХП) замкнутой систе-мы. При этом алгоритм расчета параметров регулятора R

$$\mathrm{b}\,(l, p)\,u(t) = \mathrm{a}\,(q, p)\,x(t) + b^1\,(h, p)\,g\,(t), \quad \mathrm{b}_l = 1, \quad q, h \pounds l, \qquad (2)$$

следует из равенства [4]

$$a^э\,(n + l, s) = a\,(n, s) \times \mathrm{b}\,(l, s) - b\,(m, s) \times \mathrm{a}\,(q, s).$$

В последнем соотношении, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s^i: 1, s, …, s^{n+l} в левой и правой частях и учитывая, что при s^{n+l} равенство переходит в тождество, приходим к следующей системе уравнений [4, с. 7–8]:

$$C\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^э, \qquad (3)$$

здесь C и $\boldsymbol{b}$ — матрица и вектор размерностей, соответственно $(l + q + 1)$ ´ $(n + l)$ и 1 ´ $(n + l)$, составленные из коэффициентов операторов объекта (1), $\boldsymbol{a}^э$ — вектор, составленный из коэффициентов полинома $a^э\,(n + l, s)$, $a^э_{n+l} = 1$, а $\boldsymbol{r}$ — искомый вектор настроек регулятора

$$\boldsymbol{\rho} = (\beta_0, \ldots, \beta_{l-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_q)^{\mathrm{T}}.$$

Расчетные соотношения (3) позволяют однозначно рассчитать и тем самым полностью решить классическую задачу синтеза модального регулятора (1)–(3). В общем случае [1, с. 217] качество управления в задаче модального управления назначается в виде односвязной области $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^1$), определяющей желаемое расположение корней полинома $a^{э}(n + l, s)$. При этом целевое условие формально записывается в виде

$$\Lambda \subset \mathcal{S}, \tag{4}$$

здесь Λ обозначено множество корней полинома $a^{э}(n + l, s)$.

Условие (4) допускает некоторый произвол в назначении параметров полинома $a^{э}(n + l, s)$ и, как следствие, некоторые свободы в настройках регулятора R. В настоящей работе рассматривается следующая задача. Пусть известен вектор настроек $\boldsymbol{\rho}_0$ регулятора R такой, что для заданного объекта (1) обеспечивает выполнение целевого условия (4). Будем искать семейство регуляторов R с эллиптической зоной допустимых настроек его параметров

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 + \Delta\boldsymbol{\rho}, \text{ где } \Delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} Q \Delta\boldsymbol{\rho} \le \rho^2, \ (Q > 0, \ Q = Q^{\mathrm{T}}), \tag{5}$$

максимального размера таких, что еще выполняется предписанное качество управления (4).

Основной результат

Для нахождения критического ρ_*^2 найдем выражение для ХП $a^{э}(n + l, s)$ замкнутой системы и получим условие выхода корней полинома $a^{э}(n + l, s)$ на границу области $\mathcal{S}$.

Подставляя $\boldsymbol{\rho}$ из (5) в расчетное соотношение (3), транспонируя и домножая на вектор $\boldsymbol{\sigma} = (1, s, \ldots, s^{n+l-1})^{\mathrm{T}}$ обе части полученного равенства, с учетом замечаний, сделанных к расчетной схеме (3), приходим к следующему выражению для ХП замкнутой системы:

$$a^{э}(n + l, s) = (C\boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{b} + C\Delta\boldsymbol{\rho})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} + s^{n+l}$$

или окончательно

$$a^{э}(n + l, s) = a^{э}_{0}(n + l, s) + \Delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(s). \tag{6}$$

Здесь как $a^{э}_{0}(n + l, s)$ обозначен ХП системы, получающийся в результате замыкания объекта (1) регулятором R с настройками $\boldsymbol{\rho}_0$,

$$a^{э}_{0}(n + l, s) = (C\boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} + s^{n+l},$$

и введено вспомогательное обозначение $\boldsymbol{\varphi}(s) = C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}$. Согласно постановке задачи, для $a^{э}_{0}(n + l, s)$ выполнено целевое условие (4).

Условие выхода корней полинома (6) на границу области $\mathcal{S}$ в точке s запишется равенством

$$a^{э}_{0}(n + l, s) + \Delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(s) = 0. \tag{7}$$

При этом задача нахождения эллипсоида (5) наименьшего размера, при котором корни полинома (6) пересекут границу области $\mathcal{S}$ в точке s, формально записывается

$$\rho_*^2(s) = \Delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} Q \Delta\boldsymbol{\rho} \to \min, \text{ при } \Delta\boldsymbol{\rho}: a^{э}_{0}(n + l, s) + \Delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(s) = 0. \tag{8}$$

А искомый радиус $\rho_*^2(s)$, при котором корни полинома (6) впервые выходят на границу области $\mathcal{S}$, может быть найден как минимальное значение графика $\rho_*^2(s)$, построенного вдоль границы области $\mathcal{S}$, что формально будем записывать в виде

$$\rho^2_{\max} = \min_{s\in\partial S} \rho^2_*(s), \qquad (9)$$

здесь как ∂S обозначена граница области S. Проведенные рассуждения составляют основу вычислительной технологии построения семейства регуляторов (5). При этом для машинной реализации данной схемы необходимо решить задачу (8).

Данная задача относится к классическим задачам минимизации квадратичных функций с ограничениями типа равенств на варьируемые параметры; она легко решается аналитически — методом множителей Лагранжа.

Перепишем условие (7) отдельно для действительной и мнимой частей:

$$a_R^{3}(s) + \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_R(s) = 0,\quad a_I^{3}(s) + \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_I(s) = 0.$$

Здесь как $a_R^{3}(s)$ и $a_I^{3}(s)$ обозначены соответственно действительная и мнимая части $a^{3}(n+l, s)$, а как $\boldsymbol{\sigma}_R(s)$ и $\boldsymbol{\sigma}_I(s)$ — вектора, составленные соответственно из действительных и мнимых составляющих компонент вектора $\boldsymbol{\sigma}(s)$. При этом необходимое и достаточное условие экстремума для функции Лагранжа, построенной для задачи (8),

$$L(s) = \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} Q\, \Delta\boldsymbol{r} + \lambda_1(s)\cdot(a_R^{3}(s) + \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_R(s)) + \lambda_2(s)\cdot(a_I^{3}(s) + \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_I(s)),$$

имеет вид

$$2\,Q\,\Delta\boldsymbol{r}_*(s) + \lambda_1(s)\cdot\boldsymbol{\sigma}_R(s) + \lambda_2(s)\cdot\boldsymbol{\sigma}_I(s) = 0$$

в случае $\operatorname{Im} s \neq 0$ и

$$2\,Q\,\Delta\boldsymbol{r}_*(s) + \lambda_1(s)\cdot\boldsymbol{\sigma}_R = 0$$

в случае $\operatorname{Im} s = 0$ (что эквивалентно $a_I^{3}(s) + \Delta\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_I(s) \equiv 0$, т. е. при одном ограничении).

Проводя последовательные преобразования с выделением $\Delta\boldsymbol{r}_*(s)$, домножением слева на $\Delta\boldsymbol{r}_*^{\mathrm{T}}(s)$ и т. п., приходим к результату:

$$\rho^2_*(s) = \frac{1}{2}\,(a_R^{3}(s),\, a_I^{3}(s))\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix},\quad \Delta\boldsymbol{r}_*(s) = -\frac{1}{2}\,Q^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_R(s),\, \boldsymbol{\sigma}_I(s))\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = 2\left((\boldsymbol{\sigma}_R(s) \,\vdots\, \boldsymbol{\sigma}_I(s))^{\mathrm{T}} Q^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_R(s) \,\vdots\, \boldsymbol{\sigma}_I(s))\right)^{-1}\begin{pmatrix}a_R^{3}(s)\\ a_I^{3}(s)\end{pmatrix}.$$

Проведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение. Решение $\rho^2_*(s)$ экстремальной задачи (8) при $\operatorname{Im} s \neq 0$ определяется

$$\rho^2_*(s) = \begin{pmatrix}a_R^{3}(s)\\ a_I^{3}(s)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\left((\boldsymbol{\sigma}_R(s) \,\vdots\, \boldsymbol{\sigma}_I(s))^{\mathrm{T}}\cdot Q^{-1}\cdot(\boldsymbol{\sigma}_R(s) \,\vdots\, \boldsymbol{\sigma}_I(s))\right)^{-1}\begin{pmatrix}a_R^{3}(s)\\ a_I^{3}(s)\end{pmatrix},$$

а при $\operatorname{Im} s = 0$ — выражением

$$\rho^2_*(s) = a_R^{3}(s)\,\left(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(s)\,Q^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}(s)\right)^{-1} a_R^{3}(s).$$

Заключение

В настоящей работе впервые решается задача формирования семейства модальных регуляторов — предлагается вычислительная технология формирования семейства регуляторов с эллиптической зоной настроек параметров. Приведенную технологию можно использовать и для построения семейств допустимых регуляторов с более сложной зоной настроек параметров — путем объединения эллипсоидов (5) с разными матрицами Q.

Литература

1. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.

2. *Исакович Р. Я., Логинов В. И., Попадько В. Е.* Автоматизация производственных процессов нефтяной и газовой промышленности. М.: Недра, 1983. 424 с.

3. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиност-роение, 1976. 184 с.

4. *Паршуков А. Н.* Схема синтеза модального регулятора пониженного порядка / Ин-т криосферы Земли СО РАН. Тюмень, 2001. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 31.08.2001, № 1920.

5. *Соловьев И. Г.* Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск: Наука, 1992.

---

[1] Здесь и далее, следуя [4], под $f(k, p)$ понимаем полиномиальный оператор степени k вида

$$f(k, p) = f_0 + f_1 p + \ldots + f_k p^k, \quad p^i \circ d/d t^i,$$

под $f(k, s)$ — соответствующий алгебраический полином с переменной s.

A. N. Parshukov, I. G. Solovyev

TECHNOLOGY OF SHAPING A FAMILY OF MODAL REGULATORS PROVIDING A SPECIFIED QUALITY OF CONTROL

The present paper considers a new problem – shaping a family of modal regulators with an elliptic zone of adjusting parameters, which provides a specified quality of control. The author suggests a computer technology to shape such family of regulators.