

В.Л. Якушев\*, В.Р. Цибульский\*\*

## БИОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЛАЗА НА ОСНОВЕ 3D КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Рассматривается биомеханическая модель глаза с использованием трехмерных конечных элементов. На этой основе создан пакет прикладных программ позволяющий проводить математическое моделирование деформаций глаза при различных условиях нагружения, механических свойствах роговицы и склеры, их реальной геометрической форме без требования к их осесимметричности. Материалы считаются упругими, в общем случае анизотропными. Роговица и склера рассматриваются как многослойные оболочки переменной толщины, состоящими их слоев с различными механическими свойствами. Используются изопараметрические криволинейные 20 узловые КЭ с 6 гранями. Созданный пакет служит основой для проведения моделирования глазных болезней, оперативного вмешательства, при измерении глазного давления и повреждениях глаза.*

**Биомеханика, глаз, модель, численная, 3D.**

### Введение

Глаз является чрезвычайно интересным объектом для приложения методов механики сплошной среды и вычислительной математики. За последние 15–20 лет были созданы его биомеханические модели, позволившие смоделировать воздействие на глаз различных внешних факторов. Глаз представляет собой уникальный объект исследования, его функционирование определяется законами оптики, гидромеханики, механики деформируемого твердого тела [1].

С точки зрения механики глаз — это тонкостенная оболочка с отношением толщины к радиусу кривизны порядка 0.05. Это дает основание для использования при построении биомеханических моделей теории тонких оболочек [2, 3].

Но теория оболочек в виду ее принципиальной ограниченности из-за применения различных гипотез не может обеспечить необходимую достоверность расчетов, а развитие вычислительной техники приводит к смягчению требований к объему вычислений. Кроме того, существуют многие задачи, которые уже сейчас могут быть решены в трехмерной постановке.

В настоящее время разработано большое количество универсальных пакетов на основе метода конечных элементов (МКЭ), решающих широкий класс задач механики сплошных сред, таких как задачи гидро и газодинамики, деформируемого твердого тела, совместных задач и т.п. Их универсальность приводит к тому, что от пользователя требуются высокая квалификация и выполнение большого объема работы по подготовке исходных данных для решения задачи. В качестве примеров таких пакетов можно назвать «NASTRAN», «ANSYS», «Cosmos», «ASKA», «ADINA» и другие.

В большинстве случаев при проведении исследований по биомеханике глаза используются упомянутые выше пакеты. Но они обладают слишком широким спектром возможностей, которые не нужны, например, для моделирования измерения внутриглазного давления. Кроме того, не все исследователи обладают достаточной квалификацией для их использования. Существуют публикации, в которых неверно заданы граничные условия, приложены внеш-

ние нагрузки. Пользователи иногда полагают, что пакет все сам решит, не вдаваясь в детали постановки задачи и его использования.

Поэтому авторы настоящего исследования создали собственный пакет прикладных программ для математического моделирования различных видов воздействий на глаз на основе МКЭ. Он не обладает широкими возможностями, как упомянутые выше пакеты, но прост в использовании и может модифицироваться под конкретные задачи. Этот пакет был создан на основе нами же разработанного пакета для расчета сосудов высокого давления [4].

Ниже дается описание алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния роговицы и склеры.

### Вариационная формулировка задачи

Рассмотрим вариационную формулировку трехмерной задачи теории упругости. Если задача решается в перемещениях и на контуре заданы их значения, то нужно минимизировать потенциальную энергию системы. Если задача решается в напряжениях с заданными на границе усилиями, то нужно минимизировать дополнительную работу системы. Общепринятая формулировка МКЭ предполагает отыскание полей перемещений и, как результат, связана с минимизацией потенциальной энергии системы при отыскании узловых значений вектора перемещений. После того, как перемещения будут определены, можно вычислить компоненты тензоров деформаций и напряжений [5, 6].

Рассмотрим деформируемое тело, занимающее в пространстве  $x_1, x_2, x_3$  область  $V$ , ограниченную поверхностью  $S$ . Материал будет считаться упругим и неизотропным. Перемещения в теле обозначим как  $u_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_2(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_3(x_1, x_2, x_3)$ , компоненты тензора деформаций как  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ , а тензора напряжений как  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ .

Согласно принципу возможных перемещений для сплошных сред, работа всех внутренних и внешних сил на малых возможных перемещениях точек тела из состояния его равновесия равна нулю. Возможными перемещениями  $\delta u$  являются любые малые отклонения, которые удовлетворяют условиям непрерывности тела и условиям перемещений на поверхности тела.

В общем случае трехмерной деформации работа всех внешних сил на малых возможных перемещениях равна изменению потенциальной энергии деформации тела

$$\int_V \delta W dV = \int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} t_i \delta u_i dS + \sum_{k=1}^{N_c} P_i^k \delta u_i, \quad (2.1)$$

где  $W$  — удельная потенциальная энергия деформации, которая равна свободной энергии при изотермическом процессе деформирования и внутренней энергии при адиабатическом деформировании,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{f}^T = \{f\}^T = [f_1, f_2, f_3]$  — массовые силы,  $\mathbf{t}$  — вектор внешних поверхностных сил с компонентами  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Для вариации  $\delta W$  справедливо

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \delta_\varepsilon (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) = \delta_\varepsilon (\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.2)$$

Областью интегрирования в последнем интеграле является та часть поверхности, где не заданы условия на перемещения. Знак вариации в (2.1) можно вынести за знаки интегралов, тогда

$$\delta_{\varepsilon} \left( \int_V W dV - \int_V \rho f_i u_i dV - \int_{S_{\sigma}} t_i u_i dS - \sum_{k=1}^{N_c} P_i^k u_i \right) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется вариационным уравнением Лагранжа и служит основой для вариационной формулировки задачи в МКЭ.

Введем вектор-столбцы

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}]^T, \quad \sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]^T. \quad (2.4)$$

Связь между ними определяется как

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon, \quad (2.5)$$

где матрица  $\mathbf{D}$  задана.

В общем случае  $\mathbf{D}$  является симметричной и может иметь 21 независимую компоненту. Рассматриваемый пакет позволит задавать их произвольным образом для каждого конечного элемента. В данной работе предполагается, что материал изотропен. Задание такого простейшего варианта его свойств связано с отсутствием в литературе достаточных данных для более реального расчета. В дальнейшем будут представлены результаты расчета деформаций роговицы и склеры для ортотропного материала. Сейчас проводятся численные эксперименты для параметров взятых из работы [7].

В случае изотропного упругого материала имеем:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

### Криволинейный 20 узловый КЭ

Разобьем  $V$  на конечное число конечных элементов (КЭ), каждый из которых занимает элементарную область  $V_e$ , причем  $V = \bigcup_{e=1}^{N_e} V_e$ , где  $N_e$  — число конечных элементов.

Далее будем рассматривать КЭ в виде фигур с 6 криволинейными боковыми гранями [5, 6]. Пусть в каждом КЭ введена естественная (локальная) система координат  $r, s, t$ , которая является ортогональной и  $-1 \leq r \leq +1$ ,  $-1 \leq s \leq +1$  и  $-1 \leq t \leq +1$ , тогда в них КЭ представляет собой куб.

Рассмотрим квадратичный 3D КЭ с 20 узлами [3,6], изображенный на рис. 1, для которого определены функции формы  $h_i = h_i(r, s, t)$ ,  $i$  — локальные номера узлов:

$$\begin{aligned}
h_1 &= g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17})/2, & h_6 &= g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18})/2, \\
h_2 &= g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18})/2, & h_7 &= g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19})/2, \\
h_3 &= g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19})/2, & h_8 &= g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20})/2, \\
h_4 &= g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20})/2, & h_j &= g_j, \quad j = 9, \dots, 20. \\
h_5 &= g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17})/2,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
g_i &= G(r, r_i)G(s, s_i)G(t, t_i), \\
G(\beta, \beta_i) &= \frac{1}{2}(1 + \beta_i\beta), \quad \beta_i = \pm 1, \\
G(\beta, \beta_i) &= (1 - \beta^2), \quad \beta_i = 0,
\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} G(\beta, \beta_i) &= \frac{1}{2}(1 + \beta_i\beta), \\ G(\beta, \beta_i) &= (1 - \beta^2), \end{aligned}} \right\} \beta = r, s, t \tag{3.3}$$

Координаты узлов КЭ обозначим как  $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}$  ( $i = 1, \dots, 20$ ). Тогда преобразование от глобальной системы координат к естественной для рассматриваемого КЭ записывается следующим образом

$$x_1 = \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t)x_{1i}, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t)x_{2i}, \quad x_3 = \sum_{i=1}^{20} h_i(r, s, t)x_{3i}. \tag{3.4}$$

На основании этих формул можно вычислить производные из (3.4) по естественным координатам каждого КЭ

$$x_j = \sum_{i=1}^{20} h_i x_{ji}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial r} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial r} x_{ji}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial s} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial s} x_{ji}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial h_i}{\partial t} x_{ji}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

В изопараметрическом КЭ перемещения аппроксимируются аналогично преобразованию координат через их значения в узлах  $u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}$  ( $i = 1, \dots, 20$ )

$$u_j = \sum_{i=1}^{20} h_i u_{ji}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.6}$$

В этом КЭ число узлов может меняться от 8 до 20. Если какой-либо узел с номером от 9 до 20 исключается, то в (3.3) соответствующие величины  $g_i$  обнуляются. Благодаря этому можно получить ряд переходных элементов от трехмерного тела к оболочечному КЭ, как это описано в [5]. На основании полученных формул можно найти распределение деформаций и напряжений внутри КЭ, как функции узловых перемещений. После их подстановки в (2.3), задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений, а правая часть зависит от приложенных нагрузок.

Описанный выше КЭ позволяет, как из кирпичей, строить разнообразные расчетные области. В частности, он был использован для разработки пакета прикладных программ для расчета напряженно-деформированного состояния двух пересекающихся труб с различными диаметрами и углами пересечения. Допускается наличие усиления вокруг патрубка, на самом патрубке и сварных швов. Конструкция нагружена внутренним давлением, к концу патрубка приложены силы и моменты.

### Результаты расчетов

В качестве примера рассмотрим совместную деформацию роговицы и склеры под действием внутреннего давления в 20 мм рт. ст. Профиль глаза, распределение толщин и свойства материала взяты из работы [7]. Первые показаны на рис. 1.  $r$  — это расстояние от оси глаза  $z$  по нормали до внутренней поверхности, показано сплошной линией. Штрихпунктирная линия обозначает изменение толщины. Модули упругости для роговицы и склеры 1.2 Мпа и 6.0 Мпа, коэффициенты Пуассона 0.45 и 0.45 соответственно.

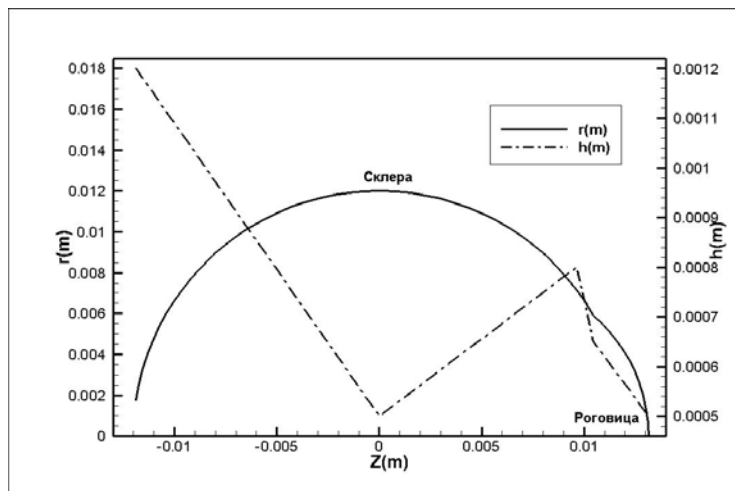


Рис. 1. 20-ти узловой изопараметрический конечный элемент

Внешний вид конечно-элементной модели показан на рис. 2, внутренний на рис. 3. Справа имеется отверстие для выхода пучка нервных волокон, который пронизывает склеру в области решетчатой пластинки. При расчетах количество конечных элементов по толщине варьировалось от 1 до 5. На рис. 4 дано распределение по толщине смещения в направлении оси  $z$ , а на рис. 5 — первого инварианта тензора напряжений в районе выхода зрительного нерва. Знание последнего важно для диагностики глаукомы [8]. Из этих рисунков следует, что распределения функций по толщине является нелинейным и не подчиняется гипотезам Кирхгофа-Лява.

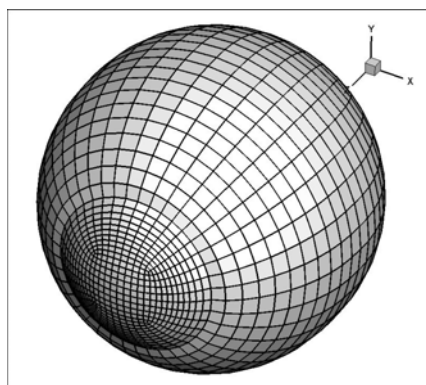
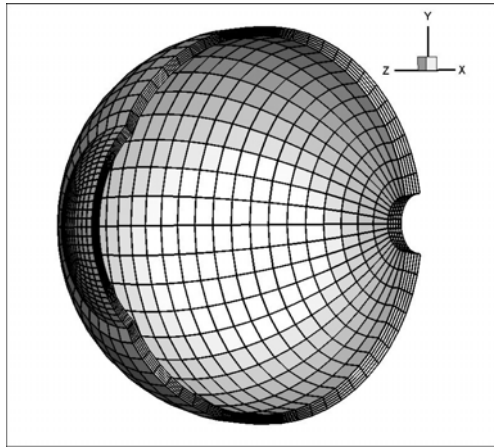
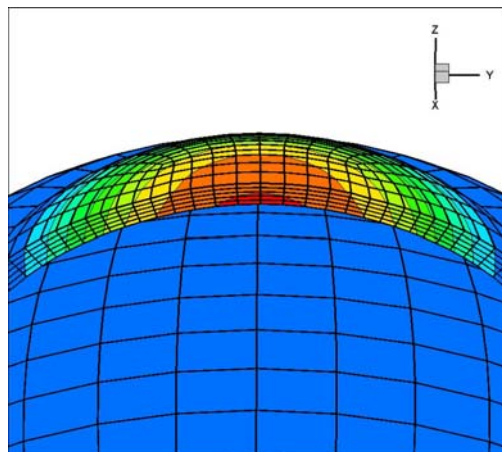


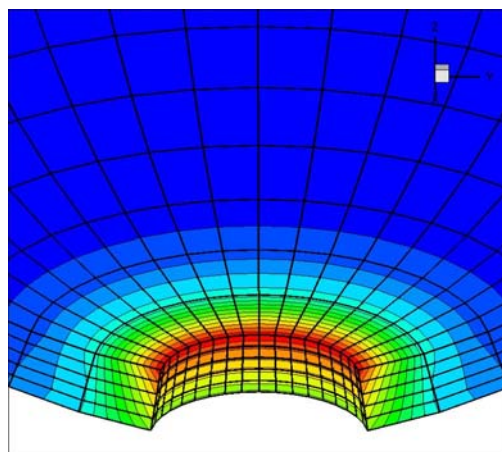
Рис. 2. Зависимость расстояния  $r$  от оси глаза и толщины оболочки  $h$  от продольной координаты  $z$



**Рис. 3.** Конечно-элементная модель глаза



**Рис. 4.** Сечение в районе вершины роговицы. Дано распределение продольной деформации  $\epsilon_z$



**Рис. 5.** Сечение в районе выхода зрительного нерва. Показано распределение касательных напряжений

### Заключение

На основе изложенного выше материала удалось создать пакет прикладных программ собственной разработки, позволяющий в дальнейшем решать разнообразные задачи о деформации глаза: измерении глазного давления, моделировать хирургическое вмешательство с различными граничными условиями, свойствами материала и формами глаза. Проект выполнен в рамках проекта РФФИ № 13-01-00801а.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Математическое моделирование в офтальмологии. Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2013–2014 гг. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2014. С. 5–47.
2. Хусаинов Р.Р., Цибульский В.Р., Якушев В.Л. Моделирование деформации глаза при измерении внутриглазного давления оптическим методом. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011, № 2, С. 349–362.
3. Якушев В.Л. Постановка задачи о математическом моделировании измерения глазного давления пневмотонометрическим методом // Механика твердого тела. Известия Российской академии наук. № 6, 2011. С. 143–152.
4. Якушев В.Л., Сумароков И.А. Применение 3D конечных элементов для расчета тонкостенных конструкций / Вестн. кибернетики. Тюмень, Издательство ИПОС СО РАН: 2006. № 5. С. 40–46.
5. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань, 1990. 269 с.
6. Bathe K.-J. The finite element procedures. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996, 1037 p.
7. Ljubimova D. Biomechanics of the Human Eye and Intraocular Pressure Measurements. Doctoral Thesis in Mechanics. Stockholm: Royal Institute of Technology; 2009; 200 p.
8. Якушев В.Л., Цибульский В.Р. Исследования по биомеханике глаза / Вестн. кибернетики. Тюмень, Издательство ИПОС СО РАН: 2014. № 2 (14). С. 69–75. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: [http://www.ipdn.ru/rics/vk/\\_private/vk14/69-75.pdf](http://www.ipdn.ru/rics/vk/_private/vk14/69-75.pdf).

\*Москва, ИАП РАН  
yakushev@icad.org.ru  
\*\*Тюмень, ИПОС СО РАН  
[tsibulsky@ipdn.ru](mailto:tsibulsky@ipdn.ru)

V.L. Yakushev, V.R. Tsybulsky

#### BIOMECHANICAL EYE MODEL BASED ON 3D FINITE ELEMENTS

*It was considered a biomechanical eye model using three-dimensional finite elements. On this basis it was established software package allowing to perform mathematical modeling of eye strain at different loading conditions, the mechanical properties of the cornea and sclera, their real geometric form. Materials are considered to be elastic and in general anisotropic. The cornea and sclera is regarded as change-layered shell thicknesses, consisting of layers of different mechanical properties. In the investigation isoparametric curved 20-node finite elements with 6 faces in natural coordinates cube are used. This package serves as a basis for modeling eye diseases, surgery, measuring of the eye pressure and eye damage.*

**Biomechanic, eye, model, finite elements, 3D.**