

И.А. Лыков, Г.П. Быстрой

РАСШИРЕННЫЙ МНОГОФАКТОРНЫЙ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ МЕТОД СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

В статье представлен новый метод многомерного мультифрактального прогнозирования нелинейных социально-экономических систем, построенный на основе модернизированного метода Хёрста. Приведены три основные гипотезы и предположения, лежащие в основе модели достоверного прогнозирования траекторий эволюции социально-экономических систем различного уровня, имеющих динамически меняющуюся сложно-детерминированную фрактальную пространственно-временную структуру. Сформулирована основная теорема прогнозирования. Показаны преимущества данного метода прогнозирования перед классическими методами и модернизированным методом Хёрста. В рамках использования метода расширено понятие экономического риска и приведена методика его оценки на основе уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Обсуждены возможности его применения в прогнозировании сложных социально-экономических систем.

Мультифрактальный метод прогнозирования, модифицированный метод Хёрста, время забывания начальных условий, время достоверного прогноза, аттрактор траектории движения, экономический риск, плотность вероятности, уравнение Фоккера — Планка.

Введение

Стремительное усложнение существующей мировой финансово-экономической системы при сложившейся сложной геополитической ситуации требует выработки эффективного механизма планирования: целей управления и развития существующих социально-экономических систем для сохранения и улучшения их конкурентной способности в мире [0]. Прошедший глобальный финансово-экономический кризис лишь подтвердил необходимость улучшения эффективности такого планирования. Прогнозирование как процесс является важным звеном, связывающим разработанную и постоянно совершенствуемую теоретическую модель исследуемой социально-экономической системы с практическими знаниями и фактами из истории ее развития [0]. Поэтому оно становится одним из главных способов формирования стратегии развития социально-экономических систем. Таким образом, без построения и совершенствования математической модели динамично меняющейся социально-экономической системы невозможно эффективное планирование [0].

Следует отметить, что на сегодняшний день насчитывается уже более трех десятков различных методов прогнозирования [0]. Многие из них можно отнести к отдельным несвязанным процедурам, учитывающим всё же некоторые нюансы конкретного объекта прогнозирования, в то время как другие представляют набор базовых методов, отличающихся последовательностью и числом применяемых методов (см. например, [0, 0]).

Значительную роль в совершенствовании методов прогнозирования социально-экономических систем играют разработки таких ученых, как В. Гольдберг [0], А.Г. Аганбегян [0, 0], Л. Клейн [0], И.В. Бестужев [0] и др. Интенсификация теоретических и прикладных разработок групп методик а также разработка совершенствование и верификация различных процедур и алгоритмов использования различных существующих методов в ходе конкретного прогно-

зирования являются основными направлениями развития большинства существующих работ по прогнозированию.

Под методом прогнозирования следует понимать совокупность способов и приемов нахождения взаимосвязей данных предыстории (в том числе внешних и внутренних связей) объекта исследования с характеристикой его поведения в будущем — достоверности его развития [0].

Следовательно, любая социально-экономическая система представляет собой открытую систему со множеством внешних и внутренних связей, анализ которых играет существенную роль для увеличения достоверности прогнозирования [0, 0]. Под достоверностью прогнозирования можно понимать корреляцию (схожесть) прогнозных данных с данными, реально имеющими место в будущем. Следует отметить, что возрастающая сложность и структурированность внешних и внутренних взаимосвязей в рамках математических моделей может быть описана лишь введением нелинейных положительных и отрицательных обратных и перекрестных связей в многомерной системе дифференциальных уравнений. Разработка такой системной модели представляет собой нетривиальную задачу и невозможна без всестороннего анализа истории развития объекта исследования. Принцип системности при этом означает рассмотрение социально-экономической системы как единого объекта, состоящего при этом из множества относительно независимых, но при этом в определенной степени связанных блоков [0, 0].

1. Модернизированный метод Хёрста

Классический метод Хёрста основан на анализе функции нормированного размаха R/S и нахождении для неё некоторого усреднённого показателя H [0, 0] для систем различной природы. Таких системам множество, начиная от физических, биологических и заканчивая сложными системами живого организма, изучаемыми в медицине.

В соответствии с классическим методом Хёрста для имеющегося временного ряда $\xi(t)$ вычисляется среднее значение $\langle \xi(t) \rangle$ на интервале времени τ , имеющем ту же размерность, что и время t :

$$\langle \xi(t) \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t).$$

По отклонению от усредненного значения на интервале времени τ рассчитывается зависимость накопленного отклонения $X(t, \tau)$, по которому вычисляется функция абсолютного размаха R и отдельно — стандартное отклонение S ряда $\xi(t)$. Функции R и S зависят от длины τ и могут расти с ее увеличением:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi(t) \rangle_{\tau} \}, \quad R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau),$$

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \cdot \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle_{\tau} \}^2}.$$

Далее вычисляется зависимость безразмерной функции R/S от длины временного интервала τ как отношение R к S . По результатам исследования многих природных процессов Хёрстом была установлена эмпирическая связь между нормированным размахом R/S и длиной интервала τ через показатель H [0]:

$$R/S \sim (\tau/2)^H, H = \frac{\ln(R(\tau)/S(\tau))}{\ln \tau - \ln 2}.$$

Хёрстом после проведения многочисленных исследований было доказано, что H может принимать значения от 0 до 1, что для рассматриваемой экономической системы, может быть трактовано следующим образом. В случае отсутствия долговременной статистической зависимости (случайное поведение анализируемого экономического показателя), данное отношение должно асимптотически стремиться к $\tau^{1/2}$ ($H=0.5$) при стремлении временной длины анализируемой выборки исходных данных к бесконечности, что на примере броуновского движения было доказано еще Б. Мандельбротом. Значения же $H > 0,5$ характеризуют сохранение тенденций к росту или убыванию показателя, как в прошлом, так и в будущем (персистентное поведение — сохранение тенденции) [7]. $H < 0,5$ означает склонность экономической системы к постоянной смене тенденции: рост сменяется убыванием и наоборот. Хёрст использовал свой метод для целей прогнозирования лишь общей тенденции временного ряда, что может быть сделано лишь на один временной период, исходя из предположения, что исходный временной ряд имеет одинаковую фрактальную структуру на всех временных масштабах, соответствующую среднему значению показателя H .

На сегодняшний день классический метод Хёрста нашёл широкое применение в экономике для анализа данных временных рядов широкого спектра экономических показателей [0–0]. Однако в действительности множеством исследователей отмечается наличие сложной пространственно-временной структуры территориально-экономических отношений во всех исследуемых задачах (см., например, [0, 0, 0, 0, 0, 0]). В геометрическом отношении эта структура является пространственно распределенной с широко развитым древом ветвлений, заканчивающихся на микротерритории домашнего хозяйства. Это качественно подтверждает существование фракталов в экономике, как в территориальном, так и экономическом отношении. В экономике фрактал — это множество, подобное самому себе в территориально-экономическом смысле. Различного рода фрактальные структуры в экономических системах приводят к фрактальному поведению экономических показателей таких систем, появляющемуся в наличии четкой взаимосвязи их прошлых значений с будущими. Таким образом, классический метод Хёрста, применяемый для анализа фрактальных свойств временных рядов экономических систем, начиная от экономики региона и заканчивая макроэкономикой, может применяться и для прогнозирования поведения таких систем.

Некорректность анализа временных рядов экономических показателей классическим методом Хёрста заключается в предположении наличия одинаковых фрактальных структур анализируемых рядов на всех временных масштабах, т.е. предполагается временная неизменность параметров экономической системы, определяющих ее саморазвитие. Это приводит к потере достоверности прогнозирования за счёт потери информации при усреднении показателя H . Для устранения данной проблемы авторами был предложен *модернизированный метод Хёрста*.

Модернизированный метод Хёрста, наиболее полно представленный в работе [0], как развитие классического метода Хёрста, является одним из эффективных методов прогнозирования, зарекомендовавшем себя во решении множества задач анализа и прогнозирования (см. например [0–0]). Его эффективность в прогнозировании доказана для поведения существенно не-

линейных систем с траекториями движения (эволюции), имеющими зоны притяжения с фрактальной пространственно-временной структурой. К таким системам может быть отнесено большинство экономических систем [0].

Модернизация классического метода Хёрста была выполнена для повышения эффективности анализа и создания возможности долгосрочного достоверного прогнозирования рядов произвольной формы, в том числе статистически нефрактальных и даже периодических. Для этого была принята следующая гипотеза:

Гипотеза 1: Показатель Хёрста H есть функция временного интервала τ .

Для этого построим функцию Хёрста R/S , как функцию τ . Новый показатель Хёрста H^* определим лишь по двум соседним точкам функции $\ln(R/S)$ от логарифма τ как производную данной функции:

$$H^*(\tau_k) = \frac{\ln(R(\tau_{k+1})/S(\tau_{k+1})) - \ln(R(\tau_k)/S(\tau_k))}{\ln(\tau_{k+1}) - \ln(\tau_k)}. \quad (1)$$

Если построить зависимость H^* от τ , то можно характеризовать временной ряд исследуемой переменной, как случайный, фрактальный или периодический, и выделить некоторые его свойства.

Классификация рядов. Анализ поведения $H^*(\tau)$, определённой согласно выражению (1), которую будем называть *характеристической функцией*, позволяет по постоянству H^* классифицировать ряд как фрактальный или нефрактальный. Если $H^* = const$, то есть не зависит от τ , и при этом $H^* \neq 0,5$, то ряд можно считать статистически фрактальным с фрактальной размерностью $D = 2 - H^*$ и корреляционной функцией.

Если $H^* = 0,5$ — ряд случаен, его фрактальная размерность имеет значение $D = 1,5$, а корреляционная функция, также как и у фрактального ряда, не зависит от времени и равна 0. То есть при $H^* = const$ справедливы формулы для определения фрактальной размерности D и корреляционной функции C .

Если же функция $H^*(\tau)$ испытывает скачок при каком-либо значении τ^* — это означает, что существует некоторый характерный временной масштаб изменения фрактальной размерности D , например, при обработке данных пары Евро/Доллар (см. рис. 1). При этом для периодических функций будет наблюдаться переход от $H^* > 0,5$ к $H^* < 0,5$. Для рядов с локальной антиперсистентностью и глобальным поддержанием тенденции характеристическая функция будет испытывать обратный скачок. В этом случае можно выделить характерное время смены тенденции τ^* , при котором и произошёл скачок.

Время характерной смены поведения показателя $H^* - t_r$, как показано в работе [0] близко ко времени забывания начальных условий, вводимым как одна из основных характеристик поведения открытых нелинейных систем с хаотическим поведением.

Важным преимуществом метода при условии постоянства фрактальных свойств исследуемой системы является возможность определения максимального времени достоверного прогнозирования, что становится возможным благодаря следующему предположению:

Гипотеза 2: Максимальное время достоверного прогнозирования единственной траектории движения (максимальная длина реконст-

рукции временного ряда) не может превышать времени забывания начальных условий исследуемой системы.

Действительно, по прошествии времени забывания начальных условий теряется корреляция (взаимосвязь) будущих значений с прошлыми. Как следствие достоверное предсказание поведения исследуемой системы на интервалах времени, больших t_f становится невозможным, поэтому t_f можно назвать временем достоверного прогноза.

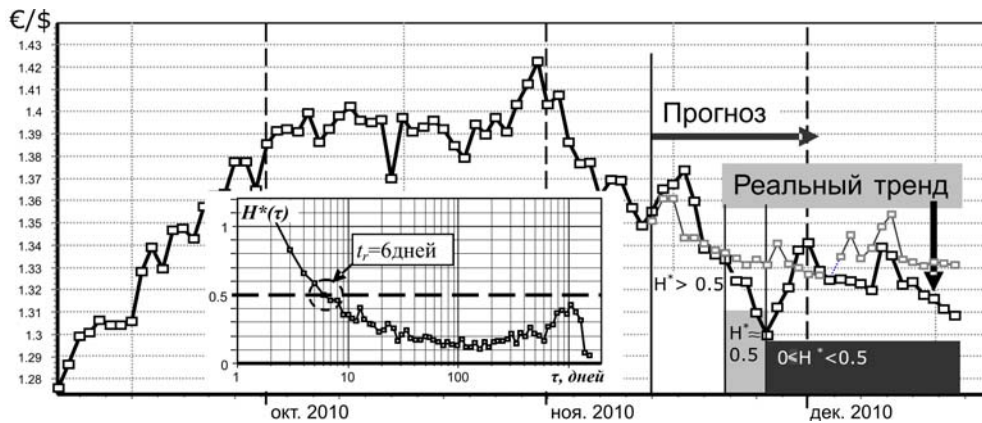


Рис. 1. Прогнозирование поведения пары Евро/Доллар модернизированным методом Хёрста для исходных данных 2005–2011 гг. и соответствующая зависимость показателя Хёрста H^* от временного масштаба τ , определенная согласно формуле (1). Горизонтальной пунктирной линией выделено значение $H^* = 0.5$. Серым цветом показана прогнозируемая модернизированным методом по поведению $H^*(\tau)$ кривая при условии неизменности фрактальных свойств показателя со временем. Показана зависимость $H^*(\tau)$, позволяющая определить время выхода на случайный процесс $t_f = 6$ дней ($H \approx 0.5$), которое классическим методом не выявляется. Из сравнения прогнозной кривой с реальными данными следует, что ряд достоверно прогнозируется только на участке $H > 0.5$ (область персистентного поведения), т.е. время достоверного прогнозирования не может превышать t_f .

В работе [0], для рядов с постоянными фрактальными свойствами, в частности, была доказана следующая теорема:

Теорема 1. Для хаотического ряда длительностью t_c можно указать временной интервал τ , где $0 \leq \tau < \tau_0$, на котором ряд достоверно прогнозируем с показателем Хёрста $1 \geq H > 0,5$.

В качестве основных преимуществ данного метода, таким образом, могут быть названы: знание и неявный учет при прогнозировании времени забывания начальных условий и прогнозирование всех альтернативных траекторий движения исследуемого объекта, не осуществимые классическими методами прогнозирования.

Следует отметить, что постоянство фрактальных свойств временного ряда возможно лишь при постоянстве управляющих параметров порождающей его системы, поэтому для систем с параметрами, изменяющимися во времени, формулировка теорем должна уточниться.

Однако метод имеет все же некоторые ограничения [0]. Основным ограничением является неизбежное влияние изменения параметров даже четко детерминированных систем, например классической системы уравнений Лоренца, на изменение времени забывания начальных условий, что влечёт не-

избежное изменение фрактальных свойств порождаемых ими временных рядов. Это означает, что в функцию R/S , рассчитываемую для прогнозирования хоть и по последним (ближайшим к прогнозируемой) точкам, однако же, с увеличением τ охватывающую всё больший временной интервал, дают вклад как последние значения временного ряда, так и довольно «давние». При наличии изменения параметров системы за этот интервал времени, таким образом, неизбежно находится некоторая усреднённая функция R/S и соответственно показатель Хёрста. Наличие такого усреднения негативно влияет на точность (следовательно, на общую достоверность) прогнозирования. Так как постоянное изменение параметров территориально-экономических систем даже в краткосрочном периоде неизбежно, необходимо оценивать степень такого изменения для коррекции метода с целью повышения достоверности прогнозирования даже на временных интервалах, не превышающих времени забывания начальных условий.

В данной статье показано, каким образом возможно снятие данных ограничений и на основании каких предположений данный метод прогнозирования может быть расширен до многомерного мультифрактального метода анализа и прогнозирования, который позволяет оценить меняющееся со временем значение времени достоверного прогнозирования по выявлению участков исходного ряда с наибольшей стабильностью управляющих параметров.

2. Мультифрактальный метод социально-экономического прогнозирования

2.1. Определение степени влияния предьстории для увеличения эффективности фрактального прогнозирования.

Любая экономическая система является открытой и, как правило, существенно нелинейной динамической системой. Это приводит к постоянному изменению её управляющих параметров как за счёт влияния извне, так и за счёт внутренних воздействий, направляемых обычно на её оздоровление и переход в фазу экономического роста. Однако это негативно сказывается на возможности прогнозирования её поведения, особенно, если не имеется достаточно полной нелинейной математической модели её описания. Поэтому предсказание её поведения в рамках любых линейных моделей на очень малых временах является достоверным лишь отчасти подобно тому, как является приближённым разложение нелинейной функции в ряд вблизи точки локального равновесия. При переходе к более длительным временным интервалам нелинейные обратные связи начинают играть существенную роль, что приводит к полной потере достоверности любого возможного прогнозирования.

Нелинейные методы в прогнозировании основаны на построении нелинейных математических моделей рассматриваемой экономической системы. При этом такие модели должны отражать все её основные закономерности товарно-денежных, территориальных и экономических взаимосвязей. Это означает, что их построение сильно затруднено, и необходим серьёзный многофакторный и детальный анализ поведения таких экономических систем. С другой стороны за время выполнения такого анализа внутренние и внешние взаимосвязи описываемого объекта могут настолько серьёзно измениться, что необходимо будет построение новой нелинейной модели для эффективного прогнозирования эволюции такой системы.

Все это сильно усложняет задачу достоверного прогнозирования и с учетом большой динамичности и изменчивости современного состояния делает её почти неразрешимой. Однако, в этом случае имеют преимущество методы

математической статистики, позволяющие быстро и довольно полно проводить анализ нелинейных систем для понимания закономерностей их эволюции без построения детально проработанных нелинейных математических моделей.

Модернизированный метод Хёрста является продолжением и расширением статистических методов для установления временных закономерностей траекторий движения сложных нелинейных и существенно неравновесных систем.

Под траекторией движения экономической системы понимается совокупность функций зависимости основных ее показателей от времени. Как известно, траектории движения любой нелинейной системы при наличии непериодических режимов формируют зоны притяжения — странные аттракторы с фрактальной структурой (рис. 2).

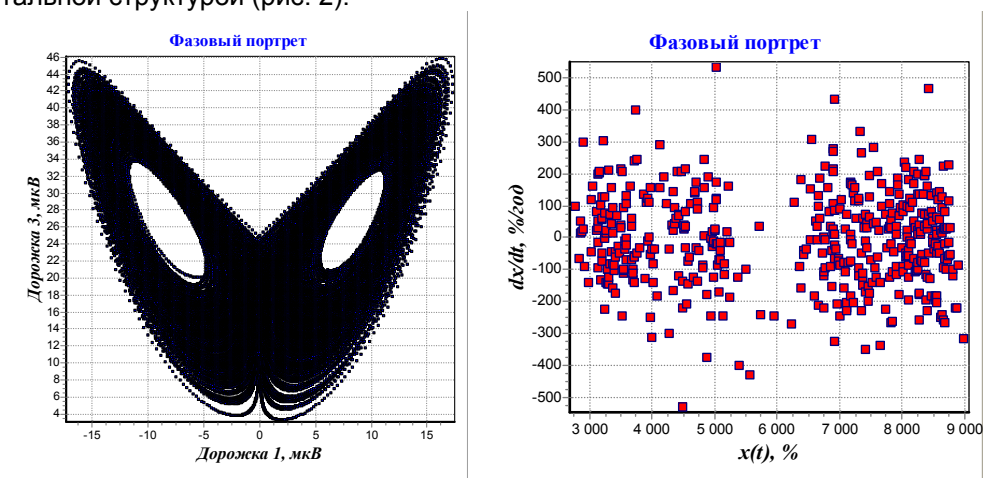


Рис. 2. Странный аттрактор траектории движения системы уравнений Лоренца и аттрактор ценового рынка меди в России в период с 10 января 2007 г. по 10 февраля 2011 г. Оба аттрактора имеют фрактальную структуру и две зоны притяжения.

Модернизированный авторами метод Хёрста позволяет проводить анализ совокупности пространственно-временных структур, сформированных при движении такой системы вокруг одного аттрактора и переходах между несколькими. Этот метод без построения сложных математических моделей позволяет определить как время забывания начальных условий, определяющее максимальную длительность любого достоверного прогнозирования, так и наличие изменений в структуре нелинейных обратных связей в самой системе, приводящих к порой радикальной смене типа эволюции и образованию новых зон притяжения, иногда попадающих в кризисную область. Наличие таких возможностей позволяет называть данный метод *мультифрактальным* не только из-за наличия возможности выявления различных типов пространственно-временных структур на разных временных масштабах траектории движения, но и из-за возможности определения изменения каждой структуры со временем из-за изменения параметров экономической системы, о котором было сказано выше.

Дальнейшее улучшение данного метода, предпринятое авторами для создания нового метода фрактального прогнозирования, привело к появлению возможности прогнозирования ветвления траекторий движения (см. например

[0]). Суть его заключается в следующем. При прогнозировании каждой последующей точки учитывается не только глобальный минимум кривой среднеквадратичного отклонения функции R/S ряда с прогнозируемой точкой от функции R/S исходного ряда, но также и все её локальные минимумы (см. рис. 3).



Рис. 3. Функция среднеквадратичного отклонения (СКО) функции R/S ряда с прогнозируемой точкой от функции R/S скорости изменения показателя просроченной кредиторской задолженности крупных и средних предприятий и организаций УрФО за 2000-2011 гг. Построение необходимо для прогнозирования всего множества сценариев эволюции фазового вектора по минимумам СКО функции R/S . Из сравнения с функцией R/S предыстории четко выделяются две возможности развития с разной вероятностью реализации

Таким образом, в качестве преимуществ метода следует отметить появление возможности предсказания всех альтернативных сценариев развития экономики, содержащихся в её предыстории, и что является наиболее существенным, момента времени их начала и возможной длительности развития.

Однако применение данного метода для целей прогнозирования позволило установить и основные закономерности потери его достоверности, связанные в первую очередь с существенным перестроением экономических систем, особенно после наступления и выхода из кризисных состояний. Это приводит к размытию функции Хёрста R/S и появлению так называемого «коридора» её изменения, и как следствие к появлению нескольких значений времени забывания начальных условий.

В качестве примера на рис. 4 а, в представлен R/S анализ с построением «коридора» для общего коэффициента рождаемости/смертности, более подробно представленный в работе [0]. Анализ проводился по первой производной переменных коэффициентов рождаемости/смертности для России в указанные годы. Виден не только резкий отрыв нижней границы, указывающий на приближение и выход за время забывания начальных условий через 3 года, но также и отрыв верхней границы, что указывает на наличие периодических изменений параметров демографической системы России «извне» (рис. 4 а, б). Максимальное время забывания начальных условий для процесса рождаемости при этом не выявляется. Пересечение границы $H = 0.5$ связано с малой величиной доступной информации о предыстории и как следствие со скудной статистикой на больших интервалах (рис. 4 в). Зависимость показателя Хёрста $H(\tau)$ для общего коэффициента смертности выходит в область значений, близкую к 0.5 (область случайных значений), при τ равном 12 лет (рис. 4 г). Таким образом, для общего коэффициента смертности время достоверного прогноза выявляется и составляет 12 лет. На временных интерва-

лах более 12 лет взаимосвязь будущих значений общего коэффициента смертности с прошлыми теряется.

На основе данного анализа можно сделать вывод, что достаточно точно спрогнозировать воспроизводство населения России при учёте постоянного изменения управляющих социально-экономических параметров можно только на 3 года вперед.

Прогноз показателя смертности населения представлен на рис. 5. Здесь каждая последующая точка каждой траектории определялась по функции минимаксной оценки стандартного отклонения функции R/S согласно модернизированному методу Хёрста, что позволило минимизировать отклонение функции Хёрста для исследуемого ряда (1960–2011 г. — для траектории 1 и 2000–2012 г. — для траектории 2) от функции Хёрста для ряда с достроенной прогнозной точкой.

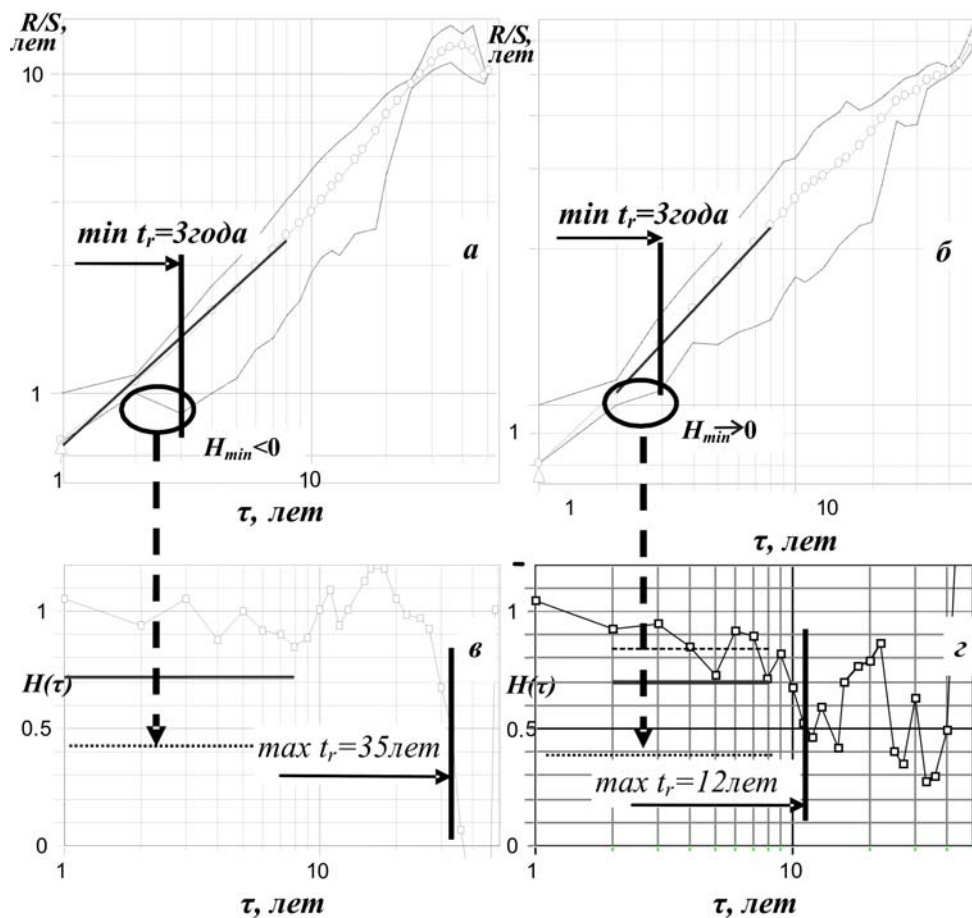


Рис. 4. Размывание функции R/S с построением «коридора» функции $R/S(\tau)$ и функции $H(\tau)$ для общего коэффициента рождаемости (а, в) и для общего коэффициента смертности (б, з) за 1960–2012 гг [0]. Коридор изменения функции R/S на (а, б) выделен пунктирной и штрихпунктирной линиями. На (в, з) светлой сплошной линией показано усреднение показателя Хёрста, пунктирной и штрихпунктирной линией обозначены усредненные значения H для верхней и нижней границы функции R/S

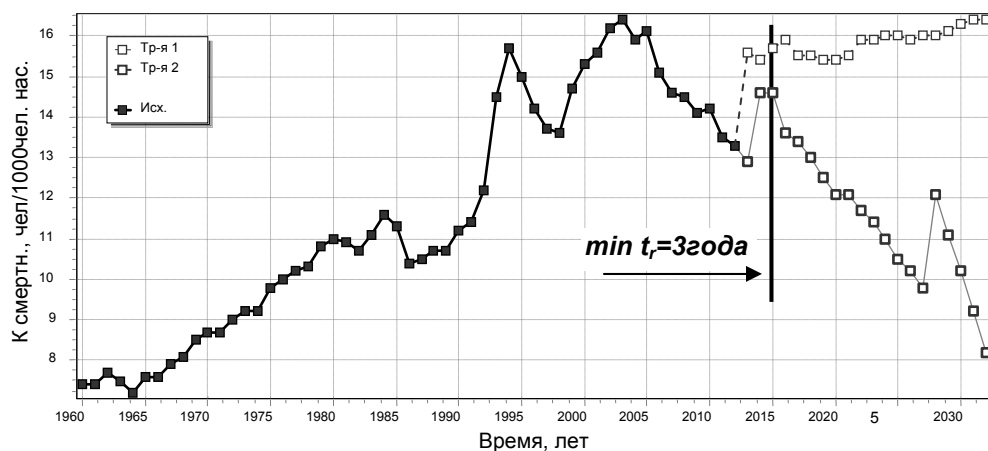


Рис. 5. Прогноз общего коэффициента смертности в СССР и РФ модернизированным методом Хёрста с прогнозируемыми траекториями на период до 2030 г [0]. Две прогнозируемые траектории близки лишь пока время прогнозирования не превышает времени достоверного прогнозирования и спустя минимальное время забывания начальных условий расходятся, обозначая различные тенденции

На рис. 6 приведено сравнение результатов прогнозирования по классическому методу Хёрста, модернизированному (рис. 6 а) и мультифрактальному (рис. 6 б) методам. Видно, что мультифрактальный метод существенно расширяет возможности прогнозирования методом Хёрста и включает в себя предыдущие методы как частные случаи. Он также помогает определить длину оптимальной предыстории для сокращения количества возможных вариантов развития прогнозной ситуации.

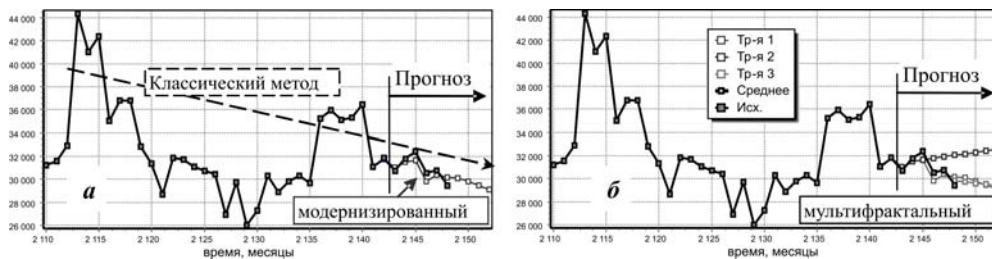


Рис. 6. Сравнение возможностей прогнозирования классического (а), модернизированного (а) и мультифрактального (б) методов Хёрста для показателя просроченной кредиторской задолженности крупных и средних предприятий и организаций УрФО за 2009–2011 гг. Классический метод предсказывает лишь тенденцию (пунктирная линия, а), модернизированный лишь одну траекторию, в то время как мультифрактальный позволяет определять все множество возможных вариантов развития ситуаций по показателю исследуемой задолженности

Таким образом, наличие изменений управляющих параметров во внутренней структуре экономической системы, порождаемых зачастую длительными негативными (как впрочем, и направленными на ее оздоровление) управляющими воздействиями, приводит к необходимости определения интервала времени, содержащего данные по предыстории, соответствующей текущему состоянию рассматриваемой системы. Это необходимо для повы-

шения достоверности прогнозирования траекторий движения, так как очевидно, что один тип поведения нелинейной системы невозможно достоверно предсказать по набору управляющих параметров, соответствующий другой нелинейной системе. Этой «другой» системой в данном случае может быть и сама экономическая система при изменении её внутренней структуры, например, за счёт сильных управляющих воздействий извне. Наличие возможности определения «коридора» изменения функции R/S , таким образом, позволяет построить новый метод мультифрактального прогнозирования, основанный на определении всех возможных типов пространственно-временных структур, присущих данной системе. Тем самым, закладывается основа прогнозирования развития структуры, наиболее полно соответствующей текущему состоянию рассматриваемой системы.

2.2. Сопоставление функций Хёрста и выделение переменных с одинаковой фрактальной структурой. Новое понимание корреляции

Как известно, любая нелинейная система может быть изучена по порождаемым её траекториям, представляющим собой в случае экономической системы набор функций зависимости основных ее параметров от времени:

$$\vec{X}(t) = \{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}, \quad (1)$$

где \vec{X} — фазовый вектор состояния в момент времени t , который характеризуется набором экономических показателей a_1, a_2, \dots, a_N в данный момент времени.

Модернизированный метод Хёрста позволяет анализировать и прогнозировать поведение лишь одного показателя от времени, например $a_1(t)$, либо $a_2(t)$ и т.д. Однако для анализа и прогнозирования многомерных (а наличие вектора \vec{X} как раз свидетельствует об этом) нелинейных экономических системы можно воспользоваться следующей гипотезой:

Гипотеза 3. Вся информация о состоянии системы содержится в каждой зависимости её фазовой координаты от времени $a_i(t)$.

Доказательство этой гипотезы следует из одной из теорем Такенса [0], а её применение к нашему случаю позволяет сделать следующий вывод: **все функции фазовых координат $a_i(t)$ фазового вектора \vec{X} имеют одинаковую фрактальную структуру.** Это означает, что вся сложная территориальная, внутренняя и временная структура рассматриваемой экономической системы находит свое отражение в изменении каждого порождаемого этой системой экономического показателя (фазовой переменной). Этот вывод является существенным, так как позволяет определить набор минимальный эффективных параметров экономической системы, полностью определяющих её состояние и, следовательно, траекторию её движения. Такой набор будет характеризоваться следующим условием:

$$R / S_{a_1}(\tau, t) = R / S_{a_2}(\tau, t) = \dots = R / S_{a_N}(\tau, t).$$

Это условие означает идентичность функций Хёрста для всех существенных параметров $a_i(t)$. **Таким образом, по поведению функции R/S и величине коридора размывания можно определить эффективный набор коррелирующих между собой экономических параметров, определяющий текущее состояние экономической системы без построения её**

нелинейной математической модели. Это является расширением идеологии модернизированного метода Хёрста и одним из преимуществ многомерного мультифрактального метода.

2.3. Прогнозирование каждого компонента. Основная теорема прогнозирования

Сформулированная выше гипотеза позволяет выполнять многофакторное предсказание её последующего состояния на основе одновременного прогнозирования всех составляющих фазового вектора согласно выражению (1):

$$\vec{X}(t) = \{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}.$$

Таким образом, модернизированный метод Хёрста может быть расширен до многомерного (комплексного) прогнозирования.

Теорема 2: Если для многомерного вектора состояния $\vec{X}(t) = \{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}$ выполняется условие

$$R / S_{a_1}(\tau, t) = R / S_{a_2}(\tau, t) = \dots = R / S_{a_N}(\tau, t),$$

то его значение может быть достоверно спрогнозировано на временном интервале τ , где $0 \leq \tau < \tau_0$, с показателем Хёрста $1 \geq H > 0,5$, а за пределами этого интервала $\tau > \tau_0$ могут быть найдены все конечное множество $N < \infty$ траекторий движения с определением вероятностей реализации каждой из них.

Доказательство первой части следует из Теоремы 1 [0] с некоторыми преобразованиями, полное её доказательство выходит за рамки данной статьи. Однако некоторые предположения и выкладки для доказательства второй части будут рассмотрены далее.

2.4. Расширение понятия экономического риска

При наличии малых флуктуаций нелинейная система описывается нормированной вероятностной функцией распределения g , связанной с потенциальной функцией системы F посредством уравнения Фоккера-Планка [0,0]:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nabla(g \nabla F) + \nabla^2(Dg),$$

где D — коэффициент диффузии. Потенциальная функция позволяет определить точки устойчивых и неустойчивых равновесий нелинейной системы, связанных с элементарными катастрофами. Правая часть уравнения состоит из двух членов — «дрейфа» и «диффузии» [0]: дрейф заставляет функцию распределения двигаться по направлению к ближайшему локальному минимуму. Роль диффузии двояка: она описывает размах функции распределения, которая концентрируется вокруг локального минимума, и вероятность, с которой флуктуация может перевести систему из метастабильного (локального) минимума в глобальный минимум. Если флуктуаций нет, то диффузия от локального к глобальному минимуму отсутствует.

По известной хаотической траектории движения, восстановленной по временному ряду, можно получить вероятностную функцию распределения (плотность вероятности) [0]. Исходя из предположения эргодичности исходного временного ряда, для данной траектории можно заменить усреднение вероятностной функции распределения по ансамблю усреднением по времени. Тогда становится возможным восстановление вероятностной функции распределения $g(x)$.

Для этого диапазон значений временного ряда разбивается на множество интервалов, количество которых, однако, должно быть много меньше количества

выборки значений. Для каждого диапазона производится определение значения функции плотности вероятности, нормированной на единицу, исходя из его ширины и количества значений выборки временного ряда, попавших в этот диапазон. Тем самым реализуется метод стохастического анализа нелинейных хаотических систем по временному ряду, будущее значение величины для которых в рамках данного метода может быть определено лишь с известной вероятностью.

По известной вероятностной функции распределения $g(x)$ возможно восстановление нормированной на коэффициент диффузии функции потенциала $F(x)/D$ по решению уравнения Фоккера — Планка в стационарном случае:

$$0 = \nabla(g\nabla F) + \nabla^2(Dg), \text{ тогда } g(x) = g_0 \cdot e^{-F(x)/D}.$$

Отсюда следует выражение для потенциала:

$$F(x)/D = -\ln(g(x)/g_0).$$

Аппроксимация потенциальной функции F возможна полиномом n степени, что соответствует элементарным катастрофам (складки, сборки, ласточкиному хвосту и т.п.) [0], которые описывают переходы между несколькими устойчивыми состояниями экономической системы [0].

Метод является применимым для анализа нелинейных систем по достаточно длинным временным рядам (реализациям). При его применении (в предположении эргодичности процессов, протекающих в исследуемой системе) становится возможным определение количества и типа точек равновесия системы, а также определение времён релаксации к локальному и глобальному минимумам (см. рис. 7).

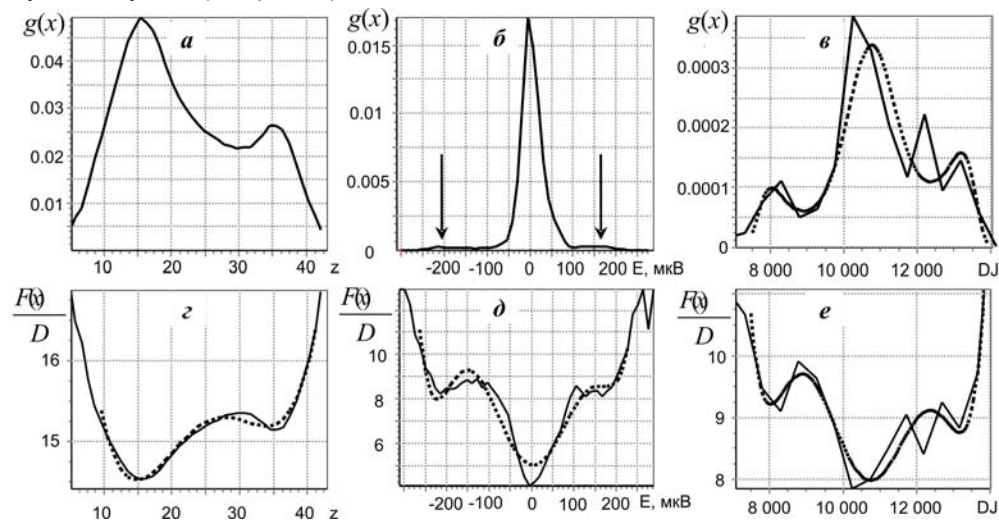


Рис. 7. Функции плотности вероятности для координаты z системы уравнений Лоренца (а), сердечной мышцы при патологии (б) и индекса Доу-Джонса (в); а также соответствующие им восстановленные потенциальные функции (г, д, е). В качестве исходных данных использовались временные ряды, содержащие 180000 выборок или $900t_0$ — система уравнений Лоренца ($\sigma = 7, r = 28, b = 8/3$) (а, г), 39000 выборок или 150 сек — электрокардиограмма с монитора Холтера для пациента с патологией (б, д) и 1486 выборок (одна в день) для индекса Доу-Джонса за период с 24.03.2005 по 17.02.2011 (в, е).

Для системы уравнений Лоренца согласно рис. 7 стохастический потенциал, восстановленный по временному ряду и аппроксимированный в виде поли-

нома 4-й степени (катастрофа сборки), совпадает с детерминистическим [0]. Анализ показывает, что для реальных систем, таких как физические, экономические, биологические и многие другие, для аппроксимации можно ограничиться полиномом 6-й степени, что соответствует катастрофе «ласточкин хвост».

Данный метод может быть расширен на многомерный случай:

$$F(x_1, \dots, x_N)/D = -\ln(g(x_1, \dots, x_N)/g_0)$$

Это позволяет определять вероятности $g(x_1, \dots, x_N)$ развития прогнозируемых по мультифрактальному методу траекторий движения социально-экономической системы и как следствие риски перехода в одно из устойчивых состояний (см. рис. 8).

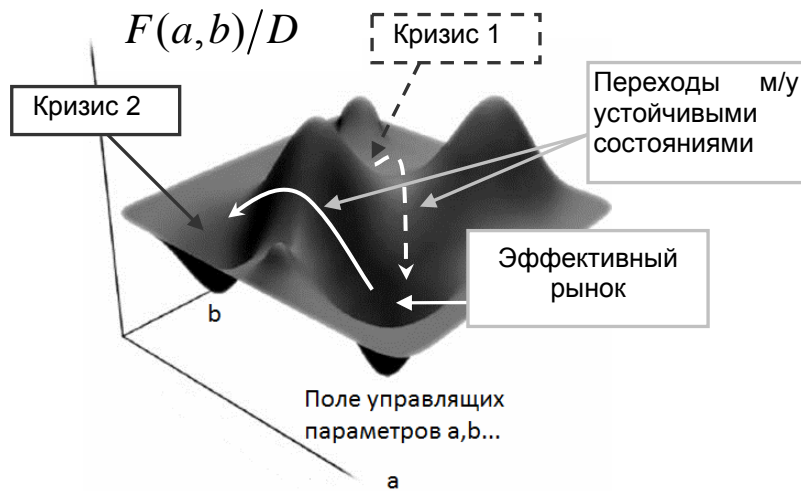


Рис. 8. Двумерная потенциальная функция нелинейной экономической системы с несколькими минимумами, соответствующими трем зонам притяжения фазовой траектории системы

Риск — вероятность развития всей совокупности невыгодных траекторий движения. Риск может быть определён как вероятность получения экономических потерь при реализации невыгодной траектории движения. При этом следует понимать, что существует и «риск получения прибыли», связанный с развитием благоприятной траектории движения.

Однако в случае мультифрактального прогнозирования, если существует набор возможных траекторий $\vec{X}_1(t), \vec{X}_2(t), \dots, \vec{X}_N(t)$, то этому набору может быть сопоставлен набор вероятностей их реализации $p_1(\vec{X}_1), p_2(\vec{X}_2), \dots, p_N(\vec{X}_N)$. Сумма вероятностей развития всех неблагоприятных траекторий и будет определять **риск R** экономических потерь:

$$R = \sum_i p_i(\vec{X}_i).$$

При этом для многомерного мультифрактального метода прогнозирования фазовое пространство экономической системы может включать в себя не

только чисто экономические показатели $a_i(t)$, определяющие фазовый вектор $\vec{X}(t) = \{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}$, а также и другие производственные/логистические/социальные и др. существенные факторы, принадлежность которых к рассматриваемой экономической системе была доказана за счёт идентичной мультифрактальной структуры.

Заключение

Представленный в статье метод многофакторного мультифрактального прогнозирования, являясь развитием модернизированного метода Хёрста, тем не менее, освобождён от недостатков последнего и расширен на область многих связанных экономических переменных. Это позволяет использовать его в многофакторном анализе и прогнозировании с автоматическим выявлением текущего времени забывания начальных условий и построением всего множества прогнозных траекторий в многомерном фазовом пространстве. Применение методов нелинейной динамики позволяет в рамках этого метода прогнозирования определять величины существующих на данный момент экономических рисков, основываясь лишь на предыстории исходного множества экономических переменных.

Метод, таким образом, создает основу для построения многомерной многофакторной нелинейной математической модели, которая позволит достичь не только нового уровня понимания сути процессов, происходящих в обществе и экономике и их взаимосвязях, но и выработать на этой основе эффективный механизм планирования для достижения поставленных целей и повышения конкурентоспособности отдельной социально-экономической системы в мировой экономике.

Все вычисления выполнены с помощью специализированного программного обеспечения [0-0].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-18-00574 «Информационно-аналитическая система «Антикризис»: диагностика регионов, оценка угроз и сценарное прогнозирование с целью сохранения и усиления экономической безопасности и повышения благосостояния России»).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агалова Т.* Современная экономическая теория: методологическая база и модели // Российский Экономический Журнал, 1995. № 10. С. 12–18.
2. *Громова Н.М., Громова Н.И.* Основы экономического прогнозирования. М.: Акад. естествознания, 2007. 112 с.
3. *Основы экономического и социального прогнозирования* / Под ред. В.Н. Мосина, Д.М. Крука. М.: Высшая школа, 1985. 285 с.
4. *Горелов С.* Математические методы в прогнозировании / С. Горелов. М.: Прогресс, 1993. 143 с.
5. *Klein, Lawrence R., and Richard M. Young.* An Introduction to Econometric Forecasting and Forecasting Models. Lexington, Mass.: Lexington Books, 1980. 172 p.
6. *Howrey, E. Philip, Saul H. Hymans, and Michael R. Donihue* Merging Monthly and Quarterly Forecasts: Experience with MQEM // Journal of Forecasting, 1991. №10. P. 255–268.
7. *Goldberg V. P.* Framing Contract Law: An Economic Perspective. Harvard University Press, 2006. 411 p.
8. *Аганбегян А.Г.* Социально-экономическое развитие России: финансово-кредитные аспекты // Деньги и кредит. 2013. № 1. С. 4–10.

9. Аганбегян А.Г. О новой модели экономического роста в России // Экономические стратегии. 2011. № 2. С. 12–19. № 3. С. 16–23.
10. Karayiannis A.D. A Synopsis of Lawrence R. Klein's Thoughts and Contributions to Economics // Archives of Economic History. 2004. V. 16. P. 5–21.
11. Gasparini A., Bestuzhev-Lada I., et al. The future of the moment before : scenarios for Russian society, torn between political and institutional discontinuities and social continuities. Gorizia: Institute of international sociology, 1993. 172 p.
12. Цыгичко В. Основы прогнозирования систем. М.: Финансы и статистика, 1986. 768 с.
13. Klein L.R., ed. Comparative Performance of U.S. Econometric Models. Oxford: Oxford University Press: 1997. 336 p.
14. Klein L.R. Contributions of Input-Output Analysis to the Understanding of Technological Change: The Information Sector in the United States // Wassily Leontief and input-output economics de Dietzenbacher / Erik y Lahr, Michael L., eds., Cambridge; New York and Melbourne: Cambridge University Press, 2004. P. 311–336.
15. Ambrose B. W., Ansel E. W., Griths M. D. Fractal Structure in the Capital Markets Revisited // Financial Analysts Journal, 1993. P. 73–77.
16. Backus D., Zin E. Long memory inflation uncertainty: Evidence from the term structure of interest rates // Journal of Money, Credit and Banking 25, 1993. №3. P. 681–700.
17. Baillie R. T., Chung C. Tieslau M. A. Analyzing inflation by fractional integrated AR-FIMA-GARCH model // Journal of Applied Econometrics 11, 1995. P. 23–40.
18. Blasco N., Santamaria R. Testing memory patterns in the Spanish stock market // Applied Financial Economics. 6, 1996. P. 401–411.
19. Conniffe D., Spencer J. E. Approximating the distribution of the R/S statistic // The Economic and Social Review 31, 2000. №3. P. 237–248.
20. Couillard M., Davison M. A comment on measuring the Hurst exponent of financial time series // Physica A, 348, 2005. P. 404–418.
21. Greene M., Fielitz B. Long-term dependence in common stock returns // Journal of Financial Economics 4, 1977. P. 339–349.
22. Peters E. R/S analysis using logarithmic returns // Financial Analyst Journal, 1992. №48. P. 32–37.
23. Hampton J. Rescaled range analysis: Approaches for the financial practitioners, Part 3, Neuro Vest Journal, 1996. P. 27–30.
24. Hassler U., Wolters U. Long memory in inflation rates: International evidence // Journal of Business and Economic Statistics 13, 1995. P. 37–45.
25. Lo A. W. Long term memory in stock market prices // Econometrica 59, 1991. №5. P. 1279–1313.
26. Lo A. W., MacKinlay A. C. A Non-Random Walk Down Wall Street. Princeton University Press; New Ed edition, 2002. 448 p.
27. Bystray G.P., Kuklin A.A., Lykov I.A., Nikulina N.L. Synergetic method of a quantitative forecasting of economic times series // Economy of Region, 4, 2013. P. 250–259.
28. Быстрай Г. П., Коршунов Л. А., Лыков И. А., Никулина Н. Л., Охотников С. А. Методы нелинейной динамики в анализе и прогнозировании экономических систем регионального уровня // Журнал Экономической Теории. Екатеринбург: 2010. № 3. С. 103–114.
29. Скорняков А. А., Лыков И. А., Охотников С. А. Моделирование сложноустроенного субъекта РФ с применением методов нелинейной динамики на примере Тюменской области // Вестн. кибернетики [Электрон. ресурс]. Электрон.журн. – Тюмень: ИПОС СО РАН, 2010. № 9. С. 123–130. Режим доступа: <http://www.ipdn.ru>.
30. Быстрай Г.П., Лыков И.А., Васильева А.В. Прогноз демографического развития России на период до 2030 года // Экономическая безопасность России: уроки кризиса и перспективы роста / Под ред. В.А. Черешнева, А.И. Татаркина, М.В. Федорова. Т. 1. Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2012. С. 932–939.
31. Татаркин А.И., Куклин А.А., Васильева А.В., Быстрай Г.П., Лыков И.А. Прогнозирование естественного движения населения России / Россия в ВТО: год после вступления / Под ред. В.А. Черешнева, А.И. Татаркина, М.В. Федорова. Т. 2. Ч. 2. Екатеринбург: Издательство «Экономика», 2014. 600с. С. 8–18.

32. Быстрая Г.П., Лыков И.А., Никулина Н.Л. Оценка рисков и прогнозирование длинных временных рядов экономических показателей // Экономика региона. 2012. № 3. С. 240–249.
33. Лыков И.А., Быстрая Г.П. Нелинейная модель климата на основе палеотермометрии в районе станции «Восток» в Антарктике // Вестн. кибернетики [Электрон. ресурс]. Электрон. журн. Тюмень: ИПОС СО РАН, 2013. № 12. С. 118–129. Режим доступа: <http://www.ipdn.ru>.
34. Косова А.А., Слободенюк А.В., Лыков И.А., Быстрая Г.П. Математическая модель прогнозирования динамики изменений эпидемического процесса токсокароза // Вестник Уральского медицинского академического университета. 2011. № 3. С. 74–75.
35. Лыков И.А., Быстрая Г.П., Найдич А.М. Выявление патологических изменений миокарда по ЭКГ методами нелинейной динамики // Труды XI Международной научно-технической конференции «Физика и технические приложения волновых процессов» под общ. Ред. Ю.Е. Мительмана. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. С. 368–371.
36. Быстрая Г.П. Термодинамика необратимых процессов в открытых системах. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 264 с.
37. Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs. Trans. Am. Soc. Civ. Eng., 1951. // Transactions of the American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770–808.
38. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 254 с.
39. Коршунов Л.А., Быстрая Г.П. Детерминированное непериодическое изменение валового регионального продукта // Экономика региона. № 1. 2010. С. 196–201.
40. Лыков И.А., Охотников С.А. Влияние изменения функции Хёрста на возможности экономического прогнозирования // Фундаментальные исследования. 2013. № 10 (7). С. 1539–1544.
41. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / D. Rang L.S., Young (eds.) "Dynamical Systems and Turbulence", Lecture Notes in Mathematics, 1981. V. 898. P. 366–381.
42. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Наука. 1990. Т. 1. 350 с. Т. 2. 287 с.
43. Лыков И.А., Быстрая Г.П. Алгоритм восстановления потенциальной функции по единственной реализации // Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 года). Тезисы докладов / Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева. М.: ЛЕНАНД, 2012. С. 375.
44. Николис Дж. Динамика иерархических систем: Эволюционное представление: Пер. с англ. / Предисл. Б.Б. Кадомцева. М.: Мир, 1989. 488 с.
45. Белоцерковский О.М., Быстрая Г.П., Цибульский В.Р. Экономическая синергетика. Вопросы устойчивости. Новосибирск: Наука, 2006. 116 с.
46. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. 296 с.
47. Лыков И.А., Найдич А.М., Быстрая Г.П., Охотников С.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011619008 «Нелинейный и статистический анализ сигналов ЭКГ». Роспатент. Зарегистрировано 18 ноября 2011 г.
48. Лыков И.А., Быстрая Г.П., Куклин А.А., Никулина Н.Л. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011614670 «Нелинейный анализ и прогнозирование коротких временных рядов экономических показателей». Роспатент. Зарегистрировано 10 июня 2011 г.
49. Быстрая Г.П., Лыков И.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012615414 «Оценка рисков, нелинейный анализ и прогнозирование длинных временных рядов экономических показателей». Роспатент. Зарегистрировано 15 июня 2012 г.
50. Быстрая Г.П., Лыков И.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012617322 «Nonlinear & Fractal analysis of Time Series of the Atmosphere». Роспатент. Зарегистрировано 15 августа 2012 г.

Екатеринбург, Уральский федеральный университет
 john-winner@yandex.ru
 Gennadyi.Bystrai@urfu.ru

Lykov I.A., Bystray G.P.

ADVANCED MULTIFACTORIAL MULTIFRACTAL METHOD
OF SOCIAL AND ECONOMIC FORECASTING

The article presents a new method for multifractal multi-dimensional prediction of the nonlinear socio-economic systems. The method is built on the basis of the modernized method Hurst. Are given three main hypotheses and assumptions underlying the model of reliable prediction of the evolution trajectories of socio-economic systems at various levels with a dynamically changing hard-deterministic fractal space-time structure. The main theorem of forecasting is formulated. The advantages of this method compared to the classical forecasting methods and modernized Hurst method are shown. As part of the method the concept of economic risk is expanded and the method of its evaluation on the basis of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation is described. The possibilities of its application in the prediction of complex socio-economic systems are discussed.

Multifractal forecasting method, modified Hurst exponent, initial conditions forgetting time, reliable forecast time, motion path attractor, economic risk, probability density, Fokker-Planck equation.