В.Р. Цибульский, С.П. Арефьев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ДРЕВЕСНО-КОЛЬЦЕВЫХ ХРОНОЛОГИЙ ПРИРОДНЫХ ЗОН СЕВЕРА ЗАПАДНОЙ СИБИРИ

В статье приведены временные ряды на базе древесно-кольцевых хронологий, полученных на севере Западной Сибири, длительностью 380 лет. Получены основные статистики и частотные характеристики. Предложена динамическая модель, связывающая рост ширины колец лиственницы, площадь, занимаемую популяцией, и температуру среды.

Древесно-кольцевые хронологии, лиственница, Ямал, Модель, частотные спектры.

Усиленное внимание к экологии Арктики связано с все возрастающей значимостью ее в энергетической стратегии развития России и всего мирового сообщества. Достаточно сказать, что на севере Западной Сибири активизировали свою деятельность исследователи из Уральского отделения РАН, Санкт-Петербурга, Томска, Норвегии и др. научных центров. Общая проблема, волнующая всех ученых, работающих в этом регионе мира — устойчивость биологических сообществ и соответственно всей окружающей среды в условиях глобального потепления и форсированного освоения нефтегазовых ресурсов [13, 14].

Одним из ключевых показателей устойчивости является биоразнообразие. Институт проблем освоения Севера СО РАН более 20 лет проводит экспедиции на север Западной Сибири для сбора материалов, характеризующих состояние и динамику природных комплексов, в том числе дендрохронологических материалов. Важной задачей проводимых работ является оценка параметров сдвига природных зон региона (тундры, лесотундры, тайги) и его влияние на параметры биоразнообразия. Одним из путей ее решения является математическое моделирование на основе ДКХ как показателя состояния субарктических экосистем с участием деревьев и кустарников [1, 2, 3, 4, 5].

Отметим особенности постановки задачи применительно к популяции лиственницы в Приполярной зоне Ямало-Ненецкого Автономного округа (ЯНАО).

1. Сообщества находятся на границе подзон северной тайги и лесотундры.

2. Сообщества достаточно однородны, ограничены, иногда имеют ячеистую структуру [8, 11].

3. Конкуренция деревьев в сообществе внутривидовая, сильно или предельно ослабленная в условиях лимитирующего абиотического теплового ресурса.

4. Наличие, численность и продуктивность (ширина годовых колец) лиственницы оказывают влияние на параметры биоразнообразия территории.

Следовательно, задача сводится к разработке модели «ресурс-потребитель». Модель должна отражать движение популяции в результате изменения внешних условий, причем последние могут иметь и отдельные непериодические экстремальные изменения, предлагается в первом варианте за основу принять изменение параметров воспроизводства и гибели особей при выше упомянутых внешних условиях.

Таким образом, динамика популяции лиственницы может описываться известным логистическим уравнением [6, 7, 9]

$$\frac{dN}{dt} = NF(N) + \sigma \cdot \dot{\xi}, \qquad (1)$$

где N — численность популяции лиственницы с нижним критическим уровнем, что характерно для приполярных районов. В этом случаи рост популяции усиливается при объединении во взаимодействующие группы, т.е. мозаичную структуру популяции, что отмечали ряд исследователей [8]. При этом возможны несколько состояний равновесия, например при продвижении границ зоны лиственницы часть популяции отмирает, часть появляется, но, продвигаясь в пространстве, меняет таким образом одно равновесное состояние на другое. Причем изменение популяции происходит путем притяжения неустойчивых областей к границам устойчивых состояний. В модели Вольтерра оно определяется коэффициентом прироста, зависящим от численности популяции при ограниченных ресурсах [9]. Здесь возможны различные варианты: от модели «сохранения площадей» [16] до метода проекционной матрицы[7].

F(N) — мальтузианская функция состояний, в том числе и циклов не приводящих к гибели популяции а лишь к смене устойчивых состояний;

σ — интенсивность случайного воздействия, в нашем случае значительно меньшего первых, но не приводящего к смене состояний.

$\dot{\xi}$ — белый шум (нормированный к единице, включающий ошибки измерений). Часто интерпретируется как производная винеровского процесса [7].

Однако при исследовании роста принято наблюдать ширину древесных колец лиственницы. Поэтому предлагается к (1) добавить уравнение наблюдения, связывающее

$$\frac{dN}{dt} = f\left(\frac{dR}{dt}\right),$$

где $R(t)$ — наблюдаемый процесс роста радиуса дерева во времени. Это возможно при условии, что наблюдаемый показатель состояний (ширина колец) или его изменения влияют на показатель выхода (численность популяции). Такое влияние доказано рядом авторов [8, 11]. Выразим f через прирост площадей лиственницы (ΔL) в зависимости от температуры (T) и прироста радиального сечения Δ R(t). При этом функция наблюдения

$$f\left(\frac{dR}{dt}\right) \equiv f(\Delta L,\ \Delta R, T, t). \qquad (2)$$

Если считать, что у каждой лиственницы есть зона существования l, то $N \cdot l = L$ при l = const.

$$\frac{dN}{dt} \equiv \frac{dL}{dt}. \qquad (3)$$

В этом случае модель имеет зависимость от внешних условий в явном виде

$$\frac{dL}{dt} = LF(L) + \sigma \cdot \dot{\xi} \qquad (4)$$

$$R = f(\Delta R, \Delta L, T, t). \qquad (5)$$

Решая эти уравнения, мы можем найти области пространства устойчивые или не устойчивые, а так же области (границы) притяжения. Для того чтобы выяснить, какая часть внешних влияний определяет первые и вторые слагае-

мые правой части уравнения состояния (4) (5), необходимо исследование динамических рядов ДКХ.

Рассмотрим подзону лесотундры ЯНАО. Проведем осреднение по трем радиусам и нескольким исследованным особям, получим частотные характеристики усредненного дендроряда.

На рис. 1 приведены усредненные древесно-кольцевые временные ряды и спектры лиственницы для трех точек подзоны лесотундры: п. Полуй — усреднение по двум радиусам *R*1, *R*2 трех лиственниц с номерами Л-6, Л-7, Л-14 протяженностью с 1610 г. по 1990 г.; район п. Самбург — по трем радиусам лиственница с номерами 5 и 1 с 1610 по 1990 г.; п. Лабытнанги — по одному радиусу лиственницы с номерами 2, 3, 4 протяженностью с 1610 по 1990 г.

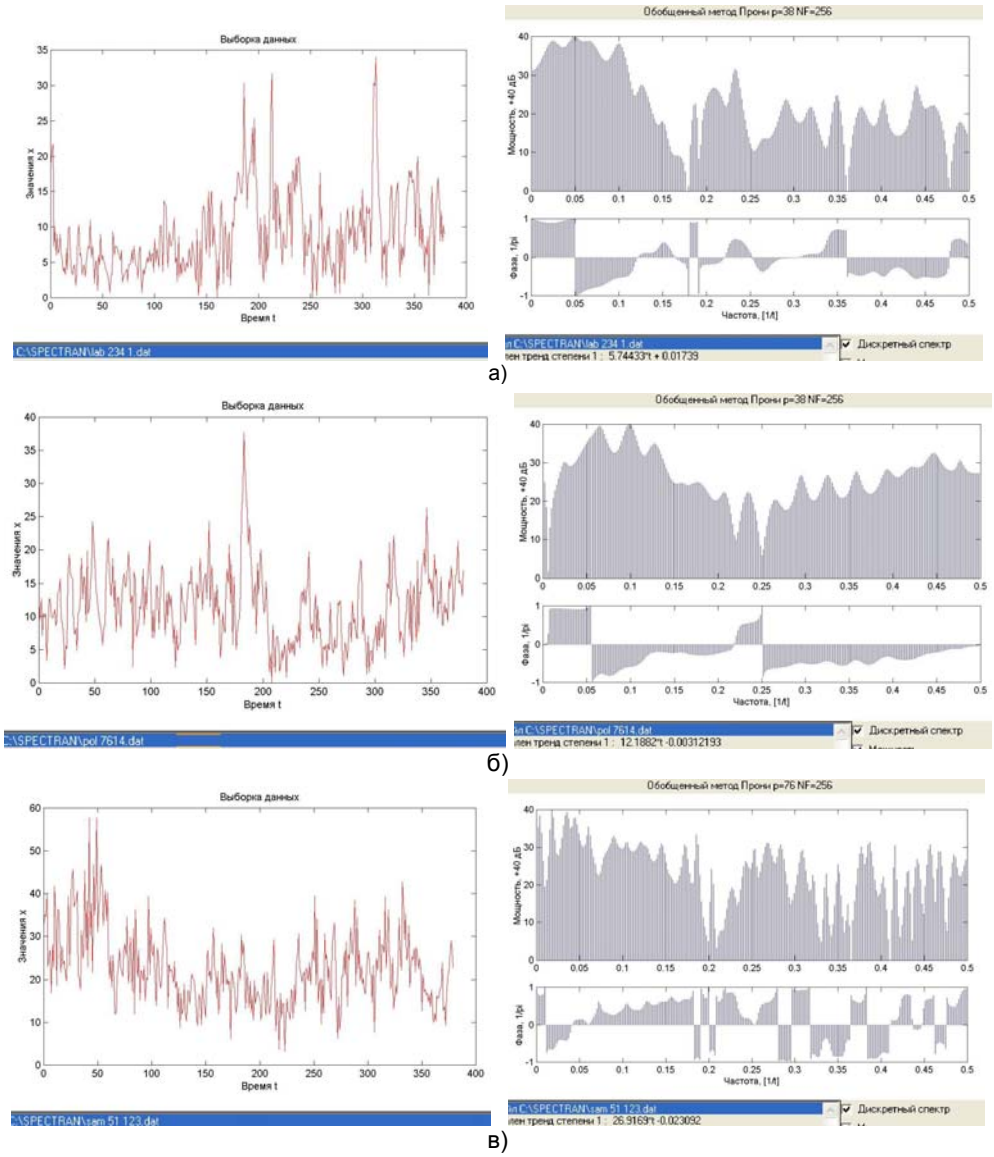

Рис. 1. Усредненные временные ряды и их спектры, полученные вблизи:
а) п. Лабытнанги; б) п. Полуй; в) п. Самбург

У всех дендрорядов убраны начальные временные промежутки усиленного роста и окончания обрезаны на дате 1990 г. для получения одинаковых длительностей. В целом возраст лиственниц примерно одинаков.

В табл. 1 приведены линейные тренды усредненных временных рядов и результаты тестирования на стационарность. Из таблицы видно, что ряды большей частью стационарны при удалении линейного тренда.

Таблица 1

Основные статистические характеристики исследуемых ДКХ лиственницы

Наименование усредненного ряда	Линейный тренд	Тест стационарности			Стандартные отклонения
		10	20	50	
lab	5,73t + 0,02	+	-	+	5,33
Pol	11,76t	+	+	+	5,43
Sam	25,75t– 0,014	+	+	-	8,8

1. Тренды отражают динамику рядов ДКХ — большему наклону соответствует большее стандартное отклонение.

2. Оценка стационарности проводилась при различных временных окнах. Например цифре 10 (реализации) в табл. 1 соответствует временное окно 38 лет, так как все ряды имеют одну длительность 380 лет.

Меняя длительность реализаций при тестировании на стационарность мы оцениваем устойчивость популяции по отношению к любым всплескам роста. Например для дендрорядов: lab1_* присутствует нестационарность (потеря устойчивости) при окне 19 лет; Sam — в окне 7–8 лет.

Прежде чем провести анализ частотных спектров, напомним основные особенности выбранного метода [3, 4]

Известно и неоднократно доказано, что ДКХ подвержены влиянию периодических колебаний солнечной активности (11 лет), положения земной оси (~20 лет) и ряда других [11, 12]. Однако достаточно часто в эти процессы вмешиваются разовые возмущения типа вулканической активности, пожаров, техногенных катастроф и прочее. Последние постепенно уменьшают свое влияние на годичный прирост ширины колец $\Delta R(t)$. Исходя из этого наиболее подходящим методом анализа частотного спектра временного ряда $\Delta R(t)$ является метод Прони [3, 15], представляющий собой разложение на комплексные затухающие гармоники. Он позволяет более точно отразить частотный спектр ДКХ в виде суммы гармонически не связанных составляющих в отличие, например, от БПФ. Причем точность зависит от коэффициента затухания (α) и отношения сигнал/шум. Поэтому при проведении анализа предпочтение будем отдавать спектральным составляющим с коэффициентом $\alpha \geq 0{,}08$ и отношением сигнал/шум 30–40 дб, что соответствует погрешности 5–7 %.

В табл. 2 приведены значения амплитуд, фаз, затухания и частоты для усредненных дендрорядов lab, pol и sam при вычитании линейного тренда, порядке модели p = 38,76 и количестве экспонент 256.

Анализ временных рядов и спектров (рис. 1) и табл. 1, 2 приводит к следующим выводам: 1) несмотря на то, что разовые выбросы роста ΔR(t) приводят к нестационарности, через 7–20 лет они затухают и, возможно, приводят к новым устойчивым состояниям. Модель с линейным трендом в этом случае не совсем корректна, так как требует стационарного равновесия; 2) разброс зна-

чений частот 10 и 20 лет также велик, что приводит к неточной оценке влияющих циклов.

Таблица 2

Спектральные характеристики усредненных дендрорядов лиственницы при линейном тренде

Места отбора керна	Амплитуда А (мм·70)	Фаза (рад)	Затухание α	Частота *f* (доля интервала)
Lab (п. Лабытнанги) f_{min} = 0,15	0,29	-0,58	-0,057	0,147
	6,72	-0,84	-0,080	0,052
	9,80	0,21	-0,080	0,108
	9,61	-0,90	-0,110	0,026
	20,12	-0,04	-0,14	0,073
	18,14	1,72	-0,23	0,122
Pol (п. Полуй) f_{min} = 0,13	1,10	-0,18	-0,038	0,024
	7,80	1,24	-0,052	0,065
	9,25	1,43	-0,060	0,098
	6,40	2,86	-0,071	0,127
	11,58	-0,60	-0,11	0,057
Sam (п. Самбург) f_{min} = 0,15 p = 76	6,53	-0,73	-0,017	0,037
	1,93	-2,66	-0,021	0,090
	2,39	-0,34	-0,025	0,143
	2,58	-0,52	-0,025	0,104
	2,65	0,49	-0,027	0,126
	8,28	-2,62	-0,028	0,044
	13,08	1,61	-0,031	0,035
	2,54	-1,12	-0,038	0,119
	67,57	-2,05	-0,487	0,093

Примечание. В таблице приведенные частотные характеристики ограничены частотой f_{min} на уровне отношения сигнал/шум 30 дб.

Для того чтобы убрать влияние единичных протяженных выбросов ΔR(t) предложено аппроксимировать и вычесть нелинейный тренд дендрорядов. Причем выбор порядка полинома (нелинейности) производить по критерию минимума разброса значений частот основных влияющих циклов.

Исследования показали, что оптимальным в этом случае является тренд четвертой степени. В табл. 3 приведены тренды тех же усредненных рядов и тесты стационарности при тех же временных окнах. В табл. 4. приведены их частотные характеристики при вычитании нелинейных трендов из исходного ряда.

Таблица 3

Тренды, тест на стационарность и статистики исследуемых ДКХ

	Тренды	Тест на стационарность			Ст. отклонение
		10	20	50	
lab	$10{,}5t^4 - 0{,}23t^3 + 0{,}003\,t^2 - 1{,}04e^{-0{,}05t} + 1{,}3e^{-0{,}08}$	+	+	+	5,68
pol	$9{,}6t^4 + 0{,}089t^3 - 0{,}0004t^2 - 2{,}8e^{-0{,}07t} + 2{,}7e^{0{,}09}$	+	+	+	5,46
sam	$30{,}3t^4 + 0{,}12t^3 - 0{,}003t^2 + 1{,}6e^{-0{,}05t} - 2{,}3e^{0{,}08}$	+	+	–	8,45

Таблица 4

Частотные характеристики тех же дендрорядов при нелинейном тренде

Места отбора керна	Амплитуда А (мм·70)	Фаза φ (рад)	Затухание α	Частота *f* (доля интервала)
Lab (п. Лабытнанги) f_{min} = 0,22 $\alpha \geq 0{,}08$	13,10 24,84 191,24 270,19	-0,023 2,32 2,28 -1,09	-0,087 -0,129 -0,29 -0,39	0,109 0,062 0,105 0,096
Pol (п. Полуй) f_{min} = 0,14 $\alpha \geq 0{,}05$	7,82 8,99 6,31 10,07	1,06 1,39 2,86 -0,71	-0,051 -0,059 -0,071 -0,104	0,066 0,098 0,127 0,055
Sam (п. Самбург) f_{min} = 0,15 $\alpha \geq 0{,}03$	7,61 3,80 3,72 7,13	1,23 -2,78 2,87 -2,00	-0,033 -0,043 -0,055 -0,08	0,066 0,120 0,093 0,144

Анализ полученных результатов показывает, что все ряды стационарны в интересующем нас диапазоне частот при некотором снижении требований к α и потере точности по амплитуде. Однако разброс основных влияющих циклов (частот, табл. 4) значительно меньше.

В заключение следует сказать, что предлагаемая динамическая модель несмотря на усложнения за счет нелинейного тренда включает в себя влияющие циклы 10 и 18–20 лет не приводящие к потере устойчивости (стационарности) и приемлема как первое приближение для дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков Ю.В.* Математическая модель сечения годичных колец и алгоритм непрерывного восстановления радиального роста дерева. Автореф. дис. … канд. техн. наук. Томск: ТГУ, 2004. 10 с.

2. *Ботыгин И.А., Попов В.Н., Тартаковский В.А.* Математические модели в задачах обработки дендроэкологических данных. Ч. 1. Томск, Известия Томского политехнического ун-та. Т. 319. № 5, 2011. С. 118–122.

3. *Цибульский В.Р., Арефьев С.П.* Динамика древесно-кольцевых хронологий сосны в районе озера Нумто // Вестн. кибернетики. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2014. № 4 (16). С. 3–11.

4. *Цибульский В.Р., Арефьев С.П.* Сравнительный анализ динамики древесно-кольцевых хронологий для разных точек отбора проб на севере Западной Сибири // Вестн. кибернетики. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2015. № 1 (17). С. 30–37.

5. *Тартаковский В.А., Исаев Ю.Н., Несветайло В.Д., Волков Ю.В., Попов В.Н.* Математическая модель радиального сечения годичных колец деревьев // Автометрия. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Т. 39, № 5, 2003. С. 118–127.

6. *Кашьян Р.Л. Рао А.Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. Пер. с англ. М.: Наука, Гл. ред. Физ-мат. литературы, 1983. 384 с.

7. *Свирижев Ю.М.* Нелинейные волны диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, Гл. ред. Физ-мат. литературы, 1987, 368 с.

8. *Харук И.И., Им В.Н., Рэнсон К. Дж., Наурзбаев М.М.* Временная динамика лиственницы в экотоне лесотундры. ДАН СССР, сер.география, 2004, том 398. № 3. С.1–5.

9. *Четвериков А.Н.* Моделирование лесных биогеоценозов. В кн. математическое моделирование биогеоценотических процессов. М.: Наука, 1985. С. 37–51.

10. *Кей С.М., Марпл С.Л.* Современные методы спектрального нализа. М.: ТИИЭР. Т. 69. № 11. ноябрь 1981. С. 5–51.

11. *Николаев А.Н., Исаев А.П., Федоров П.П.* Радиальный прирост лиственницы и сосны в центральной Якутии в связи с изменением климата за последние 120 лет. М.: Экология. 2011, № 4. С. 243–250.

12. *Ильичев В.Г.* эволюционная устойчивость биологических сообществ. Журнал общей биологии, 2010. Том 71, № 1. С. 63–74.

13. *Кономыц Э.Г., Шарая Л.С.* Количественная оценка функциональной устойчивости лесных экосистем. Экология, 2015. № 2,.С. 83–94.

14. *Пономарев В.* Экологический эталон. Система безопасности изучения Арктики, создания на Ямале, может стать мировым образом. М.: Русский репортер, № 40 (368), 2014. С. 78–79.

15. *Кухаренко Б.Г.* Исследование по методу Прони динамики систем на основе временных рядов. М.: Труды МФТИ, 2009. Т. 1. № 2. С. 170–192.

16. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.: Гл. ред. Общетехн. литературы / Пер. с нем. под ред. Кошлякова Н.С. 1936. 271 с.

17. *Логофет Д.О., Уланова Н.Г., Белова И.Н.* Две парадигмы математической популяционной биологии. Попытка синтеза. М.: Журнал общей биологии. 2011. Т. 72, № 5. С. 369–387.

Тюмень, ИПОС СО РАН
tsibulsky@ipdn.ru
sp_arefyev@mail.ru

V. R. Tsibulsky, S. P. Arefyev

THE MATHEMATICAL MODEL OF TREE-RING CHRONOLOGIES' DYNAMICS IN NATURAL AREAS OF WESTERN SIBERIA NORTH

The article presents time-series based on the tree-ring chronologies gathered in the West Siberian north. The duration of the period is 380 years. The main statistical data and frequency characteristics have been received. There has been introduced a dynamic model uniting the growth of larch rings width, the area occupied with the population and ambient temperature.

Tree-ring chronologies, larch, Yamal, model, frequency contents.