МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

В.Р. Цибульский, М.Г. Ганопольский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА С ПОЗИЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА И ИНДУКТИВНОЙ ЛОГИКИ

В статье приведены определения нечеткого множества, данные различными научными школами. Показана сфера применения и проблемы практической реализации. Предложено определение, расширяющее базовое за счет введения в виде функции принадлежности степени неопределенности вероятностных событий (состояний), являющихся элементами нечеткого множества.

Нечеткое множество, определение, функция неопределенности, степень неопределенности.

Давно подмечено, что человек как в повседневной жизни, так и в специализированной деятельности, в том числе управленческой, зачастую оперирует не столько точными значениями параметров объекта, сколько их качественными характеристиками: много-мало-нормально, тепло-холодно-прохладно и т.п. А действия по переводу объекта из одного состояния в другое привычно формулирует как: увеличить, уменьшить, оставить в прежнем состоянии т.д.

Такого рода «бытовой» лексикон послужил в свое время основой для выдвижения концепции лингвистической переменной и разработки теории нечетких множеств в качестве ее формального аппарата [1]. Предложенный Лотфи Заде термин «Fuzzy Sets» в одних случаях переводился на русский язык как нечеткие множества, в других — как расплывчатые. «Под расплывчатостью подразумевается тот тип неточности, который связан с расплывчатыми множествами…, т.е. классами, в которых нельзя указать четкую границу, определяющую элементы, принадлежащие к данному классу, и элементы, не принадлежащие к нему» [2]. Здесь же подчеркивалось различие между случайностью и расплывчатостью: «…случайность связана с неопределенностью, касающейся принадлежности или непринадлежности некоторого объекта к нерасплывчатому множеству. Понятие же расплывчатости относится к классам, в которых могут иметься различные градации степени принадлежности, промежуточной между полной принадлежностью и непринадлежностью объектов к данному классу». Тем самым Л. Заде предлагалось понятие «гранулированности» информации, а исходя из этого — функции принадлежности. Уже в этом определении есть некоторое противоречие: наличие границ, в том числе и размытых, не означает другой класс множества, так как признак принадлежности элемента множества не включен в определение.

С тех пор интерес к теории нечетких (расплывчатых) множеств пережил несколько спадов и подъемов, но при этом ключевые вопросы, касающиеся принадлежности элементов множеству, границ этой принадлежности, неопределенности таких границ были и остаются дискуссионными.

Так, в одной из современных публикаций дается следующее определение нечеткого множества: «Нечетким множеством *A*, определенным на некоторой числовой предметной области *X*, называется множество пар:

$$A = \{(\mu_A^*(x), x)\}, \quad x \in X,$$

где для каждого элемента $x \in X$ степень μ_A^* его принадлежности множеству *A* задается с помощью функции принадлежности $\mu_A(x)$, при этом $\mu_A(x) \in [0,\ 1]$» [3, с. 30].

Характерно, что в этом определении речь идет не о границах, а о принадлежности. А именно, о принадлежности элементов *x* множеству *A*, заданному на области *X*, т.е. $A \subset X$. При этом автор вводит понятие неопределенности, различая два ее вида: стохастическую и лексическую. В обоих случаях неопределенность оценивается величиной вероятности наступления события, что вполне соответствует пониманию неопределенности в теории информации К. Шеннона, где она ассоциируется с формой распределения вероятностей, а не с ее конкретным значением.

Попытку развить направление, применить вероятностную меру при оценке нечеткости множеств в 1970-х и 1980-х годах осуществила школа академика Б.Н. Петрова [4]. Предлагалось «нечеткое событие определять как нечеткое подмножество R^N, функция принадлежности которого измерима относительно исходной меры» [4, с. 143].

Вероятность нечеткого события *A* определить интегралом Лебега — Стилтьеса».

$$P(A) = \int_{R^N} \mu_A(x) dP = E[\mu_A].$$

Далее они приводят алгебру, согласующуюся с четкими и вероятностными (нечеткими) подмножествами. При этом вероятностная мера введена только для подмножеств *A*, но не для элементов этого подмножества.

Таким образом, возможно существование множества *X*, состоящего из различных подмножеств, включая нечеткие. Значит, должны существовать какие-то общие индикаторы, признаки и операции (алгебра), единые для всех подмножеств единого множества *X*.

Анализ приведенных определений показывает, что понятие принадлежности к классу в нечетких подмножествах само страдает размытостью.

Что значит, принадлежит или нет? Это событие меняется? Если нет, то почему детерминированная ситуация называется плохо определенной? А если меняется во времени, то это уже динамика и здесь есть возможность задать вопрос: а как бывает чаще? И мы уже в вероятностном пространстве!

Получается, что авторы останавливаются там, где следовало бы продолжить. Ведь именно вероятностное пространство способно стать адекватной моделью нечеткого множества в том числе и в динамике. Напомним, что определение понятия вероятностного пространства обязательно включает «пространство элементарных событий Ω с выделенной системой событий *F* и заданной на *F* вероятностью…» (см. Математический словарь высшей школы) [7]. У В. Феллера вероятностное пространство это «тройка (σ, ζ, *P*), состоящая из выборочного пространства σ и вероятностной меры *P* на ζ». Причем условие нормировки *P*{σ} = 1 может быть произвольным, т.е. {σ} < ∞ [6].

Сфера строгого применения теоретико-вероятностных методов ограничена объектами, где обеспечена статистическая устойчивость. В то же время проверка этой устойчивости часто бывает затруднена, а то и невозможна. Область нечетких множеств представляет собой как раз такой случай. Другим препятствием является ограниченность методов классической теории вероятностей. Как известно, у классического вероятностного языка есть две альтернативы: 1) язык теории множеств и теории меры, основанных на аксиоматике А.Н. Колмогорова и 2) язык теории коллективов Р. Мизеса [8, с. 146–147]. У каждой из них есть свои сторонники, но есть и противники. Во всяком случае, многое здесь зависит умелой постановки задачи, а в итоге — от искусства исследователя.

Бурное применение и развитие применения нечетких множеств в постановке Л. Заде наблюдалось в 1988–2000 гг., в связи с разработкой и производством роботов и интеллектуальных систем на их основе. Однако в последующие годы становится понятным недостаточное быстродействие при управлении и сложности при попадании в граничные области нечетких множеств, т.е. области четких или полностью хаотичных состояний.

В алгоритме становится сомнительной процедура определения и задания принадлежности при помощи чисел, пропорций и пр. Несмотря на то, что специалисты в этой области открещиваются от вероятностного подхода к оценке неопределенности, вернемся к нему и попробуем разрешить вышеприведенное противоречие или препятствие к эффективному управлению. Это становится актуальной задачей и на фоне интенсивно развивающихся вычислительных средств. Как объединить эти понятия, чтобы ввести адекватный признак или идентификатор нечеткого подмножества?

Объединить эти подходы, разрешить противоречия и увеличить быстродействие!

Прежде всего определимся с пространством X. Предлагается рассматривать его как пространство, состоящее из множества элементов x, с системой открытых четких, нечетких и полностью хаотичных подмножеств. Необходимо определиться с системным признаком объединения этих подмножеств. Возможно, это степень неопределенности, но выраженная через функцию распределения. В первом случае она минимальна, так как вероятность наступления события равна 1, в последнем — максимальна, так как хаотичное движение или белый шум имеют равномерное распределение. Все промежуточные варианты четкости или нечеткости будут зависеть от формы распределения или функционала в случае непараметрической статистики [9].

Следующим конструктивным шагом может стать установление отношения субординации между рассмотренными множествами. Предположим, что хаотичное множество — это своего рода прародитель нечеткого, а нечеткое множество — прародитель четкого. Конечно, возможны и другие варианты упорядочения, но предлагаемый способ онтологически оправдан. Под эту схему подходит повышение уровня организованности в живой природе, например, эволюционные изменения отдельных организмов или их сообществ в замкнутом пространстве. Подобным образом моделируются иерархические системы.

Таким образом, подмножество A некоторого универсального множества X, состоящего из вероятностных событий (состояний) x, имеющее обобщенный индикатор в виде функции принадлежности, отражающей степень неопределенности в интервале на отрезке [0, 1], является нечетким, если область его принадлежности определяется интервалом (0, 1).

Алгебраическая структура $F(X)$ таких множеств определяется в данном примере иерархической структурой построения и динамикой перехода из хаотического состояния в нечеткое и затем в четкое.

Множество Y назовем полем множеств [5], оно должно удовлетворять следующим условиям:

1) любое событие x является множеством;

2) X принадлежит Y, причем любой элемент Y включен в X;

3) если A принадлежит Y, то $\overline{A}$ принадлежит Y;

4) если A_1 и A_2 принадлежит Y, то $A_1 \cup A_2$ принадлежит Y;

5) поскольку $A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}$, то $A_1 \cap A_2$ принадлежит Y;

6) данная алгебра допускает объединение бесконечного числа множеств, т.е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Множество Y можно назвать σ-алгеброй, на которой может быть определена вероятностная мера [5.]

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир. 1976. 167 с.

2. *Беллман Р., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях. Сборник переводов «Вопросы анализа и процедуры принятия решений». М.: Мир, 1976. С. 172–215.

3. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / А. Пегат; пер. с англ. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 798 с.

4. *Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В.* Теория моделей в процессах управления (Информационный и термодинамический аспекты). М.: Наука, 1978. 224 с.

5. *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1978. 376 с.

6. *Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.

7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

8. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. Основы математического аппарата и прикладные аспекты. М.: Изд-во МГУ, 1992. 440 с.

9. *Тарасенко Ф.М.* Непараметрическая статистика. Томск, изд-во ТГУ, 1976. 294 с.

Тюмень, ИПОС СО РАН
v-tsib@yandex.ru
gmichaelg@mail.ru

V.R. Tsibulsky, M.G. Ganopolsky

DEFINITION OF A FUZZY SET BASED ON PROBABILISTIC SPACE OF INDUCTIVE LOGIC

Definitions of a fuzzy set given by various scientific schools have been presented. There have been revealed scopes of their application and problems of practical realization. There has been offered a definition expanding the basic one due to the introduction in the form of a membership function a degree of uncertainty of probabilistic events (states) being the elements of a fuzzy set.

Fuzzy set, definition, uncertainty function, uncertainty degree.