

Г.П. Быстрой, И.А. Лыков

СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РОСТА ВАЛОВОГО РЕГИОНАЛЬНОГО ПРОДУКТА С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ И ПОТРЕБЛЕНИЯ²

Работа посвящена созданию математической модели динамики добавленной стоимости и в целом валового регионального продукта (ВРП) с учетом накопления и потребления при наличии источников и стоков. Авторы использовали первый принцип: в экономической системе имеет место ограниченность региональных ресурсов и первичных факторов — накопления и потребления, плюс возможность направлять на потребление ранее накопленную часть; второй — антропогенный, периоды развития характеризуются стремлением человека к максимальному потреблению. В рамках задач с обострением построена синергетическая модель рыночного неравновесия для ВРП в виде системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих самоорганизацию рыночных структур, которая решалась численными методами.

Региональная экономика, синергетика, экономический рост, задача с обострением, потребление, накопление, региональные процессы.

1. Введение

В социальной области многие естественные процессы протекают в режиме с обострением: рост населения Земли, рост информации, всплески в развитии науки и культуры (плеяды талантов), быстрые прорывы в экономике, связанные с резким ростом добавленной стоимости, как на уровне региона, так и на уровне государства [1, 19]. Растет интерес к региональной экономике, особенно в последнее время.

Локальное изменение состояния среды влияет на состояние региона (на рост капитала, информации и т.п.), увеличивая его в условиях положительной обратной связи. В этом суть так называемых «задач с обострением» [23]. Что касается нелинейной отрицательной *обратной связи*, то она действительно приводит к стагнации экономики, уменьшению объема производства и постепенному скатыванию к кризису. Объемная нелинейная *положительная обратная связь*, таким образом, приводит к самоускоряющемуся росту прежде всего ВВП [3] (предложен впервые С. Кузнецом в 1934 г. [14]). Такая обратная связь служит в условиях накопления и разумного потребления источником быстрого синергетического процесса — развития с обострением [23–25]. **С этой точки зрения для любой территории очень важным является рассмотрение динамики ВРП [32]. Без этого не может быть создано эффективной стратегии устойчивого развития региона.**

Перейдем к описанию ВРП в системе «накопление (x) — потребление (y)». Потребление возрастает, когда создаются предпосылки, но прирост его становится все меньше и меньше [28, 31]. Граница производственных возможностей характеризует максимально возможные их объемы при использовании всех ресурсов.

² Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта №13-02-00264а «Синергетическая диагностика кризисных явлений в экономике регионов Российской Федерации».

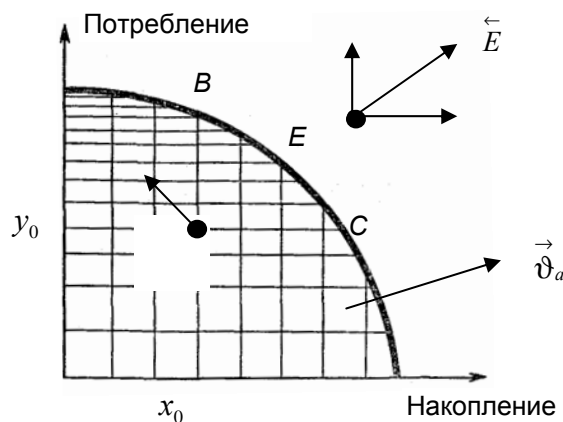


Рис. 1. Кривая производственных возможностей в векторной теории ВРП [0]

Тот факт, что кривая направлена вниз (имеет отрицательную направленность), указывает на ограниченность этой величины: находясь на самой линии, следует жертвовать потреблением, чтобы иметь большее накопление, и наоборот. Накопление может возрасти с A до C без ущерба для потребления, и наоборот (с A до B). Согласно классическим представлениям [28], для увеличения потребления необходимо отказаться от увеличивающегося накопления (рис. 1).

Будем предполагать, что по мере развития экономической системы и увеличения ВРП накопление и потребление территории увеличиваются, что соответствует возрастанию площади сегмента и появлению кривых с большим радиусом. В отличие от других работ, предположение о существовании двух фаз состояний по обе стороны от кривой производственных возможностей на основе математического моделирования создает основу для более глубокого качественного и количественного изучения развития больших экономических систем.

Цель и задачи исследования. Работа посвящена созданию математической модели динамики добавленной стоимости и в целом ВРП территории с учетом накопления и потребления при наличии источников и стоков. Здесь авторы основываются на работах Римского клуба и обобщающей обзорной работе [19]. Модель должна описывать не только эти характеристики, но и динамическую связь между ними в условиях ограниченных ресурсов и возможности их выбора, а также динамику ВРП и отражать рост национального богатства. Здесь авторами использован первый принцип: в экономической системе имеет место ограниченность региональных ресурсов, а также первичных факторов — накопления и потребления. Модель должна учитывать возможность направлять на потребление ранее накопленную часть. Второй принцип является антропогенным: периоды развития характеризуются стремлением экономического человека к максимальному потреблению, когда это возможно. Модель должна содержать возможность описания перехода к кризису [2]. Она должна позволять проводить рассмотрение не только средних по длительности циклов, но и длинных волн.

Решение всех перечисленных задач в будущем возможно только в рамках естественнонаучных методов [4–6, 21, 22]. Примером успешного применения этих методов является работа [12], в которой рассмотрено детерминированное непериодическое изменение ВРП с использованием уравнений Лоренца. Описание в рамках синергетики рыночного неравновесия, приводящего к интенсив-

ному росту ВРП и тем самым — к интенсивно увеличивающимся накоплению и потреблению, является во всех отношениях сложнейшей задачей [16].

2. Моделирование динамики добавленной стоимости

Рассмотрим, следуя [2–3], однопродуктовую модель экономической системы, которую будем характеризовать функцией состояния C — стоимость ВРП, W — объем основных фондов. ВРП — один из важнейших макроэкономических показателей, выражающий исчисленную в рыночных ценах совокупную стоимость конечного продукта (продукции, товаров и услуг), созданного в течение года внутри страны с использованием факторов производства, принадлежащих как данной стране, так и другим странам. Согласно [2] можно считать, что такое приближение не может существенно повлиять на качественные результаты базовой модели, хотя в будущем его будет необходимо учесть. Существует три основных метода расчёта ВВП: по доходам, по расходам и по добавленной стоимости.

В методе добавленной стоимости при расчете ВРП используется стоимость предназначенных для потребления товаров и услуг. В данном случае **добавленная стоимость — это общая сумма рыночных цен продукции субъектов хозяйственной деятельности, из которой необходимо вычесть стоимость потребленного сырья и материалов, полученных у поставщиков**. Общая сумма таких значений и даст ВРП. Как правило, базовый год принимается за 100 %, и исследуются только приращения ВРП.

Пусть K — курс национальной валюты, S — текущее количество денег в обращении. При оценке динамики возможны несколько точек равновесия с локальной или глобальной устойчивостью [4, 5]. Впервые метод применен одним из авторов для описания ВВП [0]. Тем не менее определение ВВП и ВРП различаются между собой. Нам хотелось подчеркнуть особенность функционирования региональной экономики: на региональном уровне нельзя устанавливать валютный курс рубля. Поэтому он считается заданным $K = const$.

2.1. Модель добавочной стоимости при анализе спроса и предложения на рынке ВРП. Уравнения возмущенного движения

Модель приращения стоимости на неравновесном рынке ВРП. Исходными в модели являются поведенческие реакции объекта исследования — функции спроса и предложения. Примем, что изменение стоимости для неравновесного рынка ВРП определено независимыми переменными — внешними и внутренними параметрами неравновесия. Причем характеристики реализованного спроса, характеризующие **общую сумму рыночных цен продукции субъектов хозяйственной деятельности**, являются внешними для системы (обозначим их индексом «e»). Характеристики предложения (индекс «i») считаем для экономической системы внутренними — они характеризуют **стоимость потребленного сырья и материалов, полученных у поставщиков**.

Пусть для региональной экономической системы функция $C(S(\xi_e, \xi_i), W, t)$ — текущее значение стоимости ВРП. В состоянии равновесия стоимость минимальна — C_0 ; ξ_e, ξ_i — внешняя и внутренняя переменные (параметры неравновесия), связанные с объемами производимой (ξ_i) и реализуемой на рынке продукции (ξ_e). Введем функцию состояния системы $S(\xi_e, \xi_i)$, характеризующую количество денег в обращении на территории и зависящую от этих параметров [2, 3].

Уравнения возмущенного движения. Введем в рассмотрение уравнения возмущенного состояния рынка, характеризуемого спросом, предложением и соответствующими ценами на ВРП [2].

Определение. Уравнения возмущенного движения для переменных спроса и предложения на уровне региона для неравновесных рыночных ситуаций представим в линейной задаче в виде скоростей изменения параметров неравновесия и их зависимости от градиентов $\partial S/\partial \xi$ вспомогательной функции S и некоторых параметров:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = f_i \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_i}, \frac{\partial S}{\partial \xi_e}, a_{ii}, a_{ie} \right), \quad \frac{d\xi_e}{dt} = f_e \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_e}, \frac{\partial S}{\partial \xi_i}, a_{ee}, a_{ei} \right), \quad (1)$$

где a_{ii} , a_{ie} , a_{ee} , a_{ei} — параметры. Тогда для полной производной стоимости как функции состояния имеем [2]:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \xi_e} \frac{d\xi_e}{dt} + \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{\partial C}{\partial W} \frac{dW}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (2)$$

Введем нижеследующие обозначения курса $K = const$, являющегося в этой работе параметром задачи, объема основных фондов Φ и остальных характеристик:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = K, \quad \frac{\partial C}{\partial W} = \Phi; \quad \frac{d\xi_e}{dt} = J_e; \quad \frac{d\xi_i}{dt} = J_i. \quad \frac{\partial C}{\partial \xi_e} = \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \xi_e} \equiv KX_e, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_i} = \frac{\partial C}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \xi_i} \equiv -KX_i; \quad X_e = \frac{\partial S}{\partial \xi_e}, \quad X_i = -\frac{\partial S}{\partial \xi_i}, \quad \delta^c = -\frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial t}. \quad (4)$$

Если K как величину, характеризующую приращение стоимости к изменению денег в обращении, принять за курс национальной валюты, то величина Φ согласно второму соотношению в (3) характеризует на уровне территории приращение стоимости к приращению основных фондов с учетом их износа. Модель справедлива именно для региона, который не может напрямую изменить курс валюты $K = const$. Для упрощения примем $\partial C/\partial t \equiv 0$ ($\delta \equiv 0$).

Определение. Спросом и предложением на производимый ВРП назовем величины, характеризующие скорости изменения параметров неравновесия ξ_e и ξ_i [2, 3]: $J_e = \frac{d\xi_e}{dt}$; $J_i = \frac{d\xi_i}{dt}$. Ценами спроса и предложения на рынке ВРП назовем величины: (рис. 1 а, б):

$$X_e = \frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial \xi_e} > 0; \quad X_i = -\frac{1}{K} \frac{\partial C}{\partial \xi_i} > 0. \quad (5)$$

Вводя в рассмотрение курс $[K] = \text{долл./руб.}$, мы нормируем цены относительно некоторой денежной единицы. Цена спроса на единицу ВРП характеризует приращение стоимости к изменению внешнего параметра неравновесия ξ_e . Примем следующую систему единиц измерения: $[\xi] = \text{у. е.}$, $[t] = \text{год}$, $[C] = \text{долл.}$, $[W] = \text{долл.}$, $[S] = \text{руб.}$, $[X] = \text{руб./у. е.}$, $[J] = \text{у. е./год}$; у. е. — условная единица ВРП.

Тогда уравнение (2) для неравновесной функции состояния C запишем в виде:

$$\frac{dC}{dt} = K \frac{\partial S}{\partial t} + \Phi \frac{dW}{dt} + KJ_e X_e - KJ_i X_i. \quad (6)$$

Это означает, что приращение стоимости на рынке ВРП в неравновесном процессе обусловлено изменением количества денег в обращении S , основ-

ных фондов W и сложившимся соотношением между общей суммой рыночных цен продукции субъектов хозяйственной деятельности и стоимостью потребленного сырья и материалов. Уравнение (6) служит основой для анализа устойчивости рассматриваемого рынка [2]. В нелинейных моделях предполагается возможность существования нескольких точек равновесия [12, 29].

Графическое представление постановки линейной задачи приведено на рис. 2. Цена спроса X_e характеризует угол наклона кривой C (ξ_e) (кривая 2), цена предложения — угол наклона кривой C (ξ_i) (кривая 1).

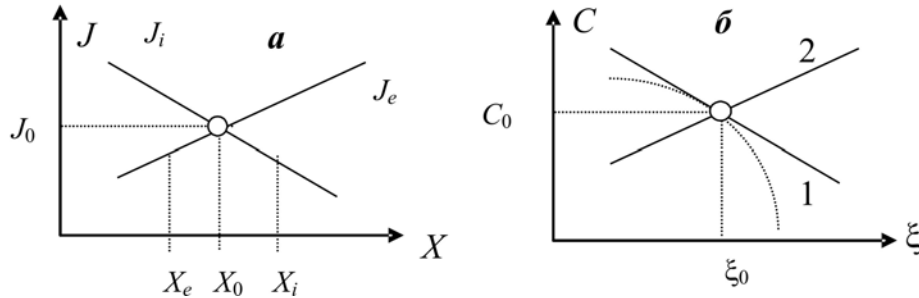


Рис. 2. Постановка линейной задачи: а) кривые спроса J_i и предложения J_e от цены; б) кривые спроса и предложения на ВРП (в у.е.) в зависимости от стоимости ВРП (C)

Определение. Состояния рынка ВРП назовем стационарными (см. рис. 2 а), если для них спрос равен предложению ($X_e = X_i = X_0$, $J_e = J_i = J_0$) и стоимость для такого гипотетического состояния рынка принимает равновесные значения $C = C_0$. Для такого состояния рынка имеем:

$$-KX_e J_e + KX_i J_i = 0, \text{ тогда } \frac{dC_0}{dt} = K \frac{dS}{dt} + \Phi \frac{dW}{dt} \Big|_{st}. \quad (7)$$

Это означает, что в стационарных состояниях дифференциал стоимости равен $dC_0 = KdS + \Phi dW$.

Прирост добавленной стоимости. Минимальность стоимости в стационарном состоянии (точка пересечения кривых на рис. 2) принимаем в качестве исходного принципа [18]. В данной задаче экономическое рыночное равновесие достигается в результате балансов спроса и предложения. Таким образом, для открытой экономической системы регионального типа из (6) получаем стоимостное уравнение на приращение стоимости ВРП [2, 4]:

$$\frac{d(C - C_0)}{dt} = -K(-J_e X_e + J_i X_i). \quad (8)$$

Изменение стоимости $\Delta^C = C - C_0 > 0$ по отношению к стационарному значению всегда положительно в силу принципа минимальности стоимости в стационарном состоянии. Учтем, что процесс накопления основных фондов W — более длительный процесс, чем получение выручки на неравновесном рынке товара. Уравнения возмущенного движения (2) с учетом введенных обозначений примут вид:

$$\frac{d\xi_e}{dt} = a_{ee} \frac{\partial S}{\partial \xi_e} + a_{ei} \frac{\partial S}{\partial \xi_i}; \quad \frac{d\xi_i}{dt} = a_{ie} \frac{\partial S}{\partial \xi_e} + a_{ii} \frac{\partial S}{\partial \xi_i},$$

или $J_e = L_{ee} X_e + L_{ei} X_i, \quad J_i = L_{ie} X_e + L_{ii} X_i. \quad (9, 10)$

Уравнения типа (10) использовались А. Вильсоном [8] при описании неравновесных процессов в экономических системах. В нелинейных задачах указанные коэффициенты матрицы зависят от цен [2].

Коэффициенты эластичности. Уравнения (10) описывают кривые спроса и предложения и их взаимовлияние через коэффициенты: $L_{ie} = \partial J_i / \partial X_e$; $L_{ie} = \partial J_e / \partial X_i$; $L_{ee} = \partial J_e / \partial X_e$; $L_{ii} = \partial J_i / \partial X_i$. Первое из них говорит о том, что изменение объема ВРП, связанное с изменением рыночной цены, можно характеризовать коэффициентом перекрестной эластичности L_{ie} . Для линейных рыночных процессов существует важное соотношение взаимности $L_{ie} = L_{ei}$, которое означает, что взаимозависимость спроса и предложения на ВРП является симметричной.

Теорема о добавленной стоимости. Уравнение (8) для выбранных переменных имеет следующий экономический смысл: если переменными состояниями рыночной экономики региона являются количество денег в обращении S , объем основных фондов W , спрос J_e , предложение J_i , то поступающая совокупная выручка в условиях реализуемого спроса ($KJ_e X_e$) на неравновесном рынке идет на увеличение добавленной стоимости (C) и издержки по производству ВРП. Сумму рыночных цен продукции субъектов хозяйственной деятельности будет характеризовать величина $KJ_e X_e$, а стоимость потребленного сырья и материалов, полученных у поставщиков — $KJ_i X_i$.

Теорема 1. Если для рынка ВРП, описываемого уравнениями возмущенного движения с перекрестной эластичностью (9, 10), можно найти знакоопределенную функцию $\Lambda = C - C_0 \geq 0$, производная которой

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -K(-J_e X_e + J_i X_i) \quad (11)$$

является знакопостоянной функцией противоположного знака с Λ или тождественно равна нулю, то прирост стоимости $\frac{d\Lambda}{dt} > 0$ является неустойчивым по Ляпунову процессом [2].

Доказательство. Для линейной системы вблизи единственного стационарного состояния C_0 найдена функция $\Lambda = C - C_0 \geq 0$, которая для уравнений возмущенного движения является знакоположительной функцией в силу используемого принципа минимальности стоимости в стационарном состоянии. Для устойчивых по Ляпунову экономических систем регионального типа имеем $\frac{d\Lambda}{dt} \leq 0$, $\frac{dS}{dt} = -J_e X_e + J_i X_i \geq 0$. Тогда получение добавленной стоимо-

сти является неустойчивым по Ляпунову процессом $\dot{\Lambda} > 0$, $J_e X_e \leq J_i X_i$. Что и требовалось доказать.

В случае нелинейных систем данная теорема в общем случае не выполняется. Формулировка более общей теоремы дается в [2, 4].

2.2. Основные гипотезы векторной теории ВРП.

Динамическое уравнение изменения ВРП

Исходным положением является расчет ВРП по добавленной стоимости (производственный метод). В основу описания экономического роста положены следующие гипотезы.

1. Гипотеза о векторном характере развития. Рассмотрим двумерный случай закона изменения текущей стоимости $C(B)$ в экономической системе, являющейся функцией богатства территории B , для этого используем уравнение (11):

$$\frac{dC}{dt} = K_0 (J_e X_e - \vec{J}_B \vec{X}_B). \quad (12)$$

Здесь добавленная стоимость — это сумма рыночных цен продукции субъектов хозяйственной деятельности ($J_e X_e \equiv -\sigma^e$), из которой необходимо вычесть стоимость потребленного сырья и материалов ($\vec{J}_B \vec{X}_B$).

Приращение текущей стоимости во времени Δt в (12) может быть представлено, учитывая накопление x и потребление y , в виде:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial B} \right)_K = -\gamma B, \quad C = \frac{\gamma B^2}{2}.$$

Постоянная γ характеризует приращение относительной текущей стоимости ВРП к изменению национального богатства [11] и отражает возникающее несоответствие между ними.

Пусть ВРП территории определяется уровнем развития в системе благосостояний. Тогда векторная величина в выбранной системе координат

$\vec{\nabla} B = \frac{\partial B}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial B}{\partial y} \vec{k}$ является градиентом и показывает изменение благосостояния B с учетом направлений развития в сторону одного (B_x) или другого (B_y) благосостояния.

Из рис. 3 видно, что далеко не всегда возможно достижение баланса между текущей стоимостью C и благосостоянием B . Положение этого вектора говорит о моделируемых приоритетах рассматриваемого экономического сообщества — заниматься больше социальной сферой или экономической.

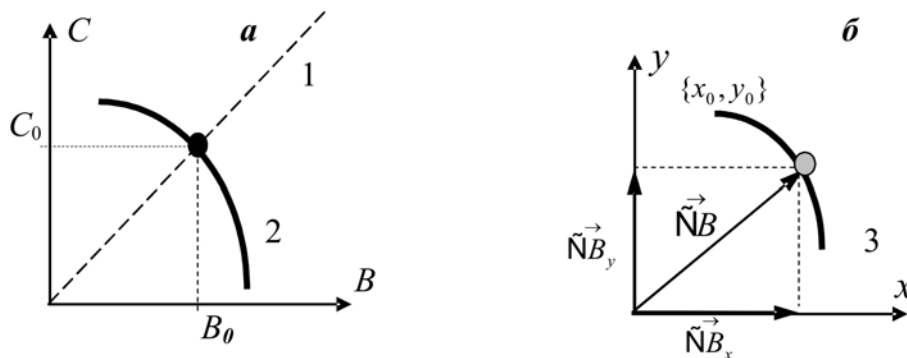


Рис. 3. Возникающее несоответствие между текущей стоимостью C ВРП и благосостоянием B : прямая линия соответствует идеальному соответствию этих двух характеристик (а); векторные представления (б): градиентное изменение ВРП в системе координат, связанной с вложениями в экономику (x) и вложениями в социальную сферу (y). Состояние с координатами $\{x_0, y_0\}$ — начальное; 2, 3 — границы благосостояния (B) и расходов бюджета x, y

2. Гипотеза о динамическом уравнении развития. Будем предполагать, что объемы \vec{J}_B и цены \vec{X}_B имеют линейную связь:

$$\vec{J}_B = L_{BB} \vec{X}_B = -l \vec{\nabla} B; \quad L_{BB} = l K_0, \quad \vec{X}_B = -\frac{1}{K_0} \cdot \vec{\nabla} B. \quad (13)$$

Здесь l — константа. Скалярная величина $\vec{J}_B \vec{X}_B$ в приведенном виде выражает ВРП.

В условиях нелинейного взаимодействия процессов накопления и потребления потоки и градиенты ВРП задаются в виде векторных функций:

$$\begin{aligned} \vec{J}_x &= -\left(l_1 \frac{\partial B_y}{\partial x}; -l_2 \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) & \vec{X}_x &= -\frac{1}{K_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}; -\frac{\partial B_x}{\partial x} \right) \\ \vec{J}_y &= \left(l_2 \frac{\partial B_y}{\partial y}; l_1 \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) & \vec{X}_y &= -\frac{1}{K_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial y}; \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

характеризующих обратные связи между ними. В результате получаем для уравнения (12): $\vec{J}_B \vec{X}_B = \left(\vec{\nabla} B \vec{\nabla} B \right) \cdot (l / K_0)$. В случае фиксированных потоков

после дифференцирования по времени (12) с учетом (14), $(\partial C / \partial B)_V = -\gamma B$, а также принципа пространственной локальности (время релаксации много меньше времени самого процесса производства ВРП) получаем локальное параболическое уравнение диффузионного типа для величины B :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{l}{\gamma} \Delta B + \frac{K_0}{\gamma} \left(\frac{\partial (J_e X_e)}{\partial B} \right), \quad \Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \text{ — лапласиан, } l = \frac{1}{K_0} \frac{\partial J_B}{\partial X_B}. \quad (15)$$

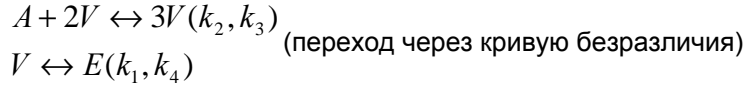
Здесь постоянный параметр l характеризует коэффициент эластичности предложения по его цене. Это уравнение говорит о том, что скорость изменения национального богатства связана с перераспределением между накоплением и потреблением (слагаемое с l / γ). Второе слагаемое обусловлено инвестициями, доходами от продажи и т.д. Полная производная в (15) может быть в условиях пополнения богатства представлена в виде с частной производной

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \left(\vec{\vartheta}_m \vec{\nabla} \right) B, \quad \text{где слагаемое с } \vec{\vartheta}_m \text{ — скорость изменения вели-$$

чины B за счет экономического экстремизма. Мы полагаем $\vec{\vartheta}_m = 0$ (полная производная равна частной). Далее задача сводится к определению второго слагаемого в правой части (15).

3. Гипотеза о фазовом переходе системы через кривую производственных возможностей. Будем считать, что величина инвестиций, доходы от продажи, затраченный при этом труд (V -факторы, описываемые в [19]) и другие источники позволяют переводить ее из состояния A , минуя кривую безразличия, в состояние E (рис. 1). Динамика развития экономической систе-

мы с переходом от фазы A к фазе E под воздействием факторов V , катализирующих такой переход, может быть описана с привлечением следующей формализованной схемы теории систем [4, 21]:



$A \leftrightarrow E$ (полный результат перехода).

Константа k_1 отражает переход с кривой безразличия в новую фазу E , а константа k_4 — обратный переход. В результате, если следовать И. Пригожину и Г. Николису [21], имеем следующее однородное нелинейное ДУ для скорости изменения ВРП:

$$\frac{dB'}{dt} = -k_1 B' + k_2 A B'^2 - k_3 B'^3 + k_4 E.$$

Параметр k_1 численно равен скорости изменения национального богатства при значении $B' = 1$ (долл/чел); k_{12} — численно равен скорости изменения национального богатства при значениях постоянной $A = 1$ и переменной $B' = 1$ (долл/чел). Данное уравнение моделирует в локальном виде постулируемый динамический процесс развития и в каноническом виде выглядит как [13]:

$$\frac{dB}{dt} = b + qB - k_3 B^3, \text{ где } q = -k_1 + 3k_3 B_0^2 = \frac{(k_2)^2}{3k_3} A^2 - k_1, \text{ } b = k_4 E - k_1 B_0 + 2k_3 B_0^3.$$

Новая переменная B и параметры развития q, α в этом уравнении будут сложными конструктами более простых параметров: $B = B' - B_0, B_0 = \frac{k_2 A}{3k_3}, \left| \frac{\rightarrow}{A} \right| = \frac{x_0}{y_0}$.

Здесь A и E — национальное богатство в фазе A и фазе E соответственно (рис. 1), B характеризует параметр порядка — отклонение B' от некоторого среднего (по Хакену) $B_0 = (B'_+ + B'_-)/2$ [27].

4. Гипотеза о формализации источников экономического развития.

Представим второе слагаемое в (15) в виде суммы источников и нелинейных стоков:

$$\frac{K_0}{\gamma} \left(\frac{\partial(J_e X_e)}{\partial B} \right) = b + qB - \alpha B^3, \quad \alpha \equiv k_3, \quad (16)$$

где q — константа источников ($[q]=1/c$), α — нелинейных стоков (обратные переходы с кривой безразличия в состояние A [31]) согласно постановке задач с обострением А. Самарского [23–25]. Параметр $b = Q_0 \cos(\omega t)$ подразумевает наличие периодических внешних инвестиций, не зависящих в первом приближении от B . В результате, учитывая (16), приводим (15) к виду:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{l}{\gamma} \Delta B + \underbrace{Q_0 \cos(\omega t) + qB - \alpha B^3}_L. \quad (17)$$

Здесь L — члены, учитывающие перераспределение капитала между потреблением и накоплением. Под «стоками» (αB^3) понимается одновременное расходование ВРП в единицу времени для поддержания устойчивого разви-

тия. Источниками развития (qB) являются труд, ресурсы, знания, особенно технологические (научно-технический прогресс) и др. [6, 10].

5. Гипотеза о тензорном характере развития. Учет возможности выбора направлений экономического роста. Математическая модель должна учитывать возможность выбора направления движения, как в сторону роста потребления, так и в сторону накопления. Если следовать работе [4],

это можно учесть в виде тензорных величин $\hat{q}, \hat{\alpha}$ и \hat{l} :

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{l} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь вводятся новые константы взаимодействия источников и стоков. Для упрощения принимаем равенство перекрестных друг другу коэффициентов $q_{12} = q_{21} = 0$, $\alpha_{12} = -\alpha_{21} = \alpha_2$, $q = q_{11} = q_{22}$, $\alpha_1 = \alpha_{11} = \alpha_{22}$. Предполагая в выражениях (13) наличие различной зависимости потока \vec{J}_B от градиента национального богатства $\vec{\nabla}B$, в (18) полагается, что коэффициент пропорциональности l — коэффициент эластичности для двухмерного случая имеет тензорный вид: $l_{11} = l_{22} = l_1$ — коэффициенты собственного накопления или потребления, $l_{12} = -l_{21} = l_2$ — перекрестные коэффициенты их взаимодействия.

2.3. Система ДУ для определения экономических характеристик региона. Приведение к безразмерному виду

Комплексный вид уравнений эволюции. Описание данной задачи продолжим через рассмотрение полного национального богатства в комплексном виде $B = B_x + iB_y$ (компоненты национального богатства B_x, B_y , отвечающие за потребление и накопление соответственно). Тогда вместо уравнения эволюции (17) можно записать систему двух нелинейных параболических уравнений с функцией источников и стоков и гармоническим изменением инвестиций:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{l_1}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \right) - \frac{l_2}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \right) + Q_0 \cos(\omega t) + q B_x - (\alpha_1 |B|^2 B_x - \alpha_2 |B|^2 B_y) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{l_1}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \right) + \frac{l_2}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \right) + Q_0 \cos(\omega t) + q B_y - (\alpha_1 |B|^2 B_y + \alpha_2 |B|^2 B_x) \end{cases} \quad (19)$$

Для комплексной переменной $B = B_x + iB_y$ имеем уравнение эволюции, подобное уравнению Курамото — Цузуки [30], в виде:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{l_1}{\gamma} (1 + ic_1) \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) + Q_0 \cos(\omega t) (1 + i) + qB - \alpha_1 (1 + ic_2) |B|^2 B, \quad (20)$$

где $c_1 = l_2 / l_1$ и $c_2 = \alpha_2 / \alpha_1$ характеризуют величину перекрестных эффектов. *Возникающий поперечный размер структуры в виде кривой безразличия, изображенной на рис. 1, если следовать А. Самарскому, обусловлен конкуренцией между приращением богатства и его распространением на сферы потребления и накопления в условиях экономического сопротивления.* Сочетание источников и стоков в (19) формирует сложные нелинейные

обратные связи, что может ускорять рост ВРП. В излагаемой модели реализована одна из концепций Римского клуба: «Сочетание роста эксплуатации возобновимых источников, истощения невозобновимых *источников* и переполнения *стоков* медленно, но верно ведет к увеличению энергии и капитала, необходимых для поддержания количества и качества материальных потоков, которые обеспечивают работу экономики» [19].

Приведение к безразмерному виду. Введем нормировочные параметры в полученную модель: $x^* = x / \ell_0$, $y^* = y / \ell_0$, $t \equiv t / t_0$; богатство $B^* = B / B_c$ является в такой модели величиной $B^* = \sqrt{B_x^{*2} + B_y^{*2}}$, где ℓ_0, t_0, B_c — масштабы области накопления и потребления, времени и национального богатства соответственно. Эти параметры позволяют привести уравнения (19) к безразмерному виду, если ввести обозначения $l_1^* = \frac{t_0 l_1}{\gamma l_0^2}$, $l_2^* = \frac{t_0 l_2}{\gamma l_0^2}$,

$$q^* = q t_0 = \frac{t_0 (k_2)^2}{3k_3} B_0 - k_1 t_0 \hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} t_0 B_c^2, \omega^* = \omega t_0, Q_0^* = Q_0 t_0 / B_c:$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x^*}{\partial t} = l_1^* \left(\frac{\partial^2 B_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_x^*}{\partial y^{*2}} \right) - l_2^* \left(\frac{\partial^2 B_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_y^*}{\partial y^{*2}} \right) + Q_0^* \cos(\omega^* t) + q^* B_x^* - \left(\alpha_1^* |B^*|^2 B_x^* - \alpha_2^* |B^*|^2 B_y^* \right), \\ \frac{\partial B_y^*}{\partial t} = l_1^* \left(\frac{\partial^2 B_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_y^*}{\partial y^{*2}} \right) + l_2^* \left(\frac{\partial^2 B_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 B_x^*}{\partial y^{*2}} \right) + Q_0^* \cos(\omega^* t) + q^* B_y^* - \left(\alpha_1^* |B^*|^2 B_y^* + \alpha_2^* |B^*|^2 B_x^* \right) \end{cases} \quad (21)$$

Отметим характерные особенности, связанные с системой уравнений эволюции (21).

1. Целеполагание. Член, отвечающий за инвестиции $Q_0^* \cos(\omega^* t)$, содержит два параметра — Q_0^* , ω^* , изменение которых будет влиять на прирост национального богатства. Приведенный коэффициент эластичности $l_1^* = \frac{t_0}{\gamma l_0^2 K_0} \frac{\partial \vec{J}_B}{\partial X_B}$

наравне с инвестициями увеличивает скорости изменения обеих составляющих богатства во времени — B_x^* и B_y^* . Выбор перекрестного коэффициента эластичности в форме (13а) объясняет более значительное влияние $l_2^* = \frac{t_0 l_2}{\gamma l_0^2}$ на

потребление, чем на накопление, так как знаки в каждом из уравнений (21) перед членами с l_2^* различны. *За этими знаками скрыта целеполагающая установка системы — где это возможно, развитие будет осуществляться в сторону увеличения потребления: $y^* \rightarrow \max$. Далее будет показано, что изменение знаков на противоположные приводит к новой модели, в которой накопление максимально $x^* \rightarrow \max$, что соответствует изменению целевой установки.*

2. Эволюция системы как автоволновой процесс. Система уравнений (21) содержит автоволновые решения, когда общее решение распространяется

по координатной плоскости в начальный момент времени из точки $\{x_0^*, y_0^*\}$ со скоростью ϑ_a . Используя полученное значение параметра $q = \frac{(k_2)^2}{3k_3} A^2 - k_1$ ин-

тенсивности источника развития и $\alpha = k_3$, а также $q^* = qt_0$, $\hat{\alpha}^* = \hat{\alpha}t_0 B_c^2$, находим выражение для скорости автоволнового процес-

$$са: \vartheta_a = \sqrt{\frac{q^*}{2\hat{\alpha}^*}} = \sqrt{\frac{1}{2k_3 B_c^2} \left(\frac{(k_2)^2}{3k_3} B_0^2 - k_1 \right)} = \sqrt{\frac{(k_2)^2}{6(k_3)^2} A^2 - \frac{k_1}{2k_3 B_c^2}}. \text{ Это означа-}$$

ет, что кривая производственных возможностей (рис. 1) при развитии распространяется в сторону увеличения накопления и потребления из начального состояния с постоянной скоростью.

3. Граничные условия. Система дифференциальных уравнений в частных производных решалась численными методами при начальных условиях для функции $B^*(x^*, y^*, t^*)$, которые задавались следующим образом [7]:

$$B^*(x^*, y^*, 0) = \begin{cases} \phi_0 \exp \left(i \cdot \left(M_0 \sqrt{(x^* - x_c^*)^2 + (y^* - y_c^*)^2} + m \cdot \arctg \left(\frac{y^*}{x^*} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right), & r^* \leq r_0^* \\ 0, & r^* > r_0^* \end{cases}$$

Здесь ϕ_0 — амплитуда национального богатства, M_0 — модуль волнового вектора вдоль радиус-вектора, m — топологический заряд, $r^* = \sqrt{(x^* - x_c^*)^2 + (y^* - y_c^*)^2}$; $x^* = x / \ell_0$, $y^* = y / \ell_0$ — приведенные координаты. Центр области для данной задачи имеет координаты $x_c^* = 0.5$, $y_c^* = 0.5$. Таким образом, задавался некоторый ведущий центр в небольшой области вблизи центра с координатами (x_c^*, y_c^*) радиусом r_0^* расчётных точек. В остальной области амплитуда была равна 0, $m = 0$, $\phi_0 = 10$, $M_0 = 60$. Решения системы уравнений имеют место во всей области $x^* = x / \ell_0$, $y^* = y / \ell_0$, однако экономическое содержание имеет только область положительных значений накопления и потребления. Граничные условия задавались в виде отсутствия возмущения на границе и отсутствия потоков через границу и не менялись.

Согласно выбранной концепции описания добавленной стоимости могут быть определены выражения для стоимости потребленного сырья и материалов $(\vec{J}_B \vec{X}_B)$ и суммы рыночных цен продукции $J_e^* X_e^* = J_e X_e \frac{K_0 t_0}{\gamma B_c^2}$, и как

следствие — функция **скорости приращения добавочной стоимости от времени**, приведение которых выходит за рамки данной работы.

Условия устойчивого развития. Для уравнения (12) в приведенном виде условие получения добавочной стоимости выглядит как $J_e^* X_e^* - \vec{J}_B^* X_B^* > 0$. В результате для уравнения (20) условия устойчивого развития:

$$а) -\frac{3}{2} < c_2 = \frac{\alpha_2^*}{\alpha_1^*} < \frac{3}{2}; б) c_2 B_y^* \geq 0, B_x^* \leq (B_x^*)_0, \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \leq 0, \quad (22)$$

где $a = 1 - (3Q_0^*/4c_2 B_y^*)$, $b = (3q^{*2}/4\alpha_1^{*2} c_2 B_y^*) - (3Q_0^*/4c_2)$, $Q_0^* = Q_0^* \cos(\omega^* t)$, а $(B_x^*)_0$ — единственный вещественный корень уравнения $B_x^{*3} + aB_x^* + b = 0$. Решение (20) в условиях малых инвестиций (21) устойчиво, если выполняется условие, приведённое в [5], которому отвечают два следующих критерия:

$$1) c_1 c_2 > -1; 2) \lambda < \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda} = \pi/\tilde{l}, \tilde{l} = \sqrt{\frac{(-2)(1+c_1 c_2)}{c_1^2 + 1}} \text{ — параметр.}$$

3. Результаты численных расчетов

3.1. Выбор параметров. Управление

Соотношение между параметрами и переменными выбиралось таким, чтобы обеспечивалось создание добавленной стоимости $\dot{C}^* > 0$. Исследовались также случаи, соответствующие стагнации экономики. Поскольку задача многопараметрическая, то исследовались различные наблюдаемые экономические ситуации: $c_1 = 1$, $c_2 = 0.1$, $q^* = 1$, $\alpha_1^* = 10$, $\alpha_2^* = 1$, $l_1^* = 10$, $l_2^* = 1$, $\phi_0 = 10$, $M_0 = 60$. Шаг по x^* и по y^* выбирался равным $\Delta_x = \Delta_y = 0,00625$.

Параметры внешнего поля инвестиций выбиралась в пределах $Q_0^* = 1 \div 1000$; частота следований инвестиций — $\omega^* = 1 \div 210$. Период длинной волны выбирался как $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 45 \text{ лет}$. Частота $\omega^* = 45$ говорит о ежегодных разовых инвестициях. Таким периодом может характеризоваться средний срок эксплуатации в странах природных ресурсов и наибольший срок работоспособного периода деятельности людей. Последнее подчеркивает роль человеческого капитала в проблеме описания богатства.

Установлено, что увеличение амплитуды инвестиций в рамках интервала $Q_0^* = 100 \div 1000$ повышает потребительский спрос на продукцию. Увеличение l_1^* повышает скорости изменения обеих составляющих ВРП B_x^* и B_y^* и приводит к увеличению выпуска продукции ($\vec{J}_B^* X_B^*$). Увеличение l_2^* уменьшает стремление системы к накоплению и увеличивает потребление. Смена знака перед l_2^* в (21) меняет целевую установку на противоположную.

3.2. Динамика ВРП B^* . Векторы развития

На диаграмме «накопление — потребление» (рис. 4а) при $t = 4,5 \cdot 10^{-3}$ (≈ 45 лет) фиксируются кривые производственных возможностей вплоть до пределов роста, соответствующих качественным классическим представлениям (рис. 1). В модели эти кривые получены как проекции величины национального богатства B^* на плоскость $\{x^*, y^*\}$ и являются количественными, а не

качественными характеристиками. Величину B в натуральных показателях можно вычислить, если задать масштаб национального богатства (например, $B_c \sim 100000$ долл/чел) [11].

При указанных инвестициях на среднем участке при $Q_0^* = 100$ фиксируется четко выраженный циклический процесс с периодом в несколько лет (период средних волн).

На начальном участке длинной волны наблюдается обострение (значение B^* резко растет), что является результатом внутренней конкуренции процессов перераспределения между накоплением и потреблением в условиях инновационного подъема при значительных инвестициях $Q_0^* = 100 \div 1000$. В результате возникает автоволновой процесс, когда кривая безразличия распространяется с приведенной скоростью ϑ_a . Такие режимы часто называют самоорганизацией, а науку, их изучающую, — синергетикой [2, 17].

На конечном участке длинной волны прогнозируется переход в кризис (обострение — резкий спад величины B^*). Фиксируется некоторая пространственная структура (рис. 4 б) неоднородной связи накопления и потребления.

Вот как это трактуется при постановке задач роста в работах Римского клуба: «Дополнительные затраты... станут настолько велики, что дальнейший рост в промышленности поддерживать не удастся. Когда это произойдет, цикл положительной обратной связи, раньше работавший на рост материальной экономики, получит обратную направленность: начнется спад» [19].

Модель позволяет в пространстве «накопление — потребление $\{x^*, y^*\}$ » строить векторы направлений развития [29]. На рис. 5 а область А перед кривой безразличия характеризует часть экономического пространства, где можно двигаться в любом направлении; область Е — находится за пределами ресурсных ограничений.

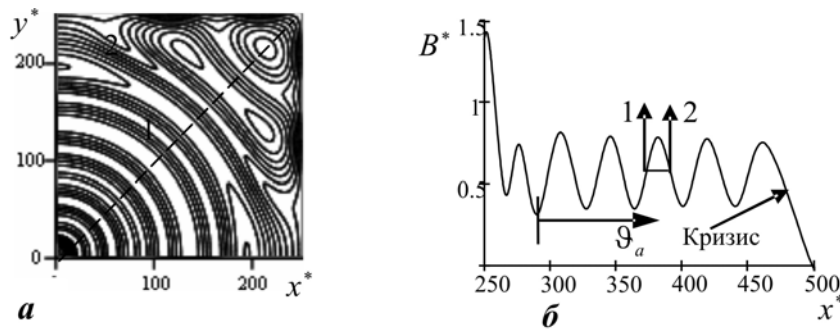


Рис. 4. Динамические кривые производственных возможностей (сравнить с рис. 1) и пределы роста территории. Приведена проекция профиля безразмерного ВРП

$$B^* = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \text{ на плоскость «накопление — потребление } \{x^*, y^*\} \text{»}$$

в момент времени $t = 4,5 \cdot 10^{-3} t_0$ (а); центральное сечение по диагонали безразмерного полного национального богатства как проекция на ось x^* (б); $Q_0^* = 100$

В области А происходит увеличение потребления с уменьшением накопления, если это соответствует целевой установке; далее происходит их совместное увеличение, приводящее к области Е, где наблюдается увеличение накоплений за счет уменьшения потребления. Это означает возможность направлять на потребление ранее накопленную часть и соответствует классиче-

ским представлениям: влияние коэффициента эластичности l_2^* на потребление в рассматриваемой модели более значительно, чем на накопление, так как знаки в слагаемых с l_2^* в каждом из уравнений (21) различны. За этими знаками скрыта выбранная целеполагающая установка: *развитие будет осуществляться, где это возможно, в сторону увеличения потребления*. При ее изменении возможности оперативного управления при разработке сценариев развития возрастают.

Выбрав сочетание благ, соответствующее точке между A и E на первоначальной кривой производственных возможностей (рис. 5 а), общество обеспечивает более высокий уровень жизни населения, более высокий уровень текущего непроизводственного потребления, сокращая размер накопления, поэтому кривая производственных возможностей последующего периода покажет незначительное увеличение производственного потенциала общества.

Текущая стоимость C^* . На рис. 5 б приведены характеристики безразмерной текущей стоимости богатства C^* . Эта величина $C = \frac{\gamma B^2}{2}$ ($C^* = B^* / 2$)

указывает на кинетический «потенциал» системы с гораздо меньшим, чем B^* , значением в начальный кризисный период. Параметр γ характеризует *инерционные свойства экономики* региона и связан с переоценкой в экономике стоимостных функций. На рис. 5 б фиксируется циклический процесс и последующий переход в кризис с более значительными амплитудами, чем B^* . В период кризиса текущая стоимость в представлении людей падает быстрее, чем цена национального богатства, что наблюдается как на макро-, так и на мезоуровнях. Основные переоценки экономического человека человеком национального богатства имеют место в начале и в конце длинной волны.

Недостаток модели заключается в том, что она дает асимптотическое стремление C к нулю, что, вероятно, не совсем соответствует действительности, хотя в период глобального кризиса производимый и человеческий капитал обесцениваются значительно.

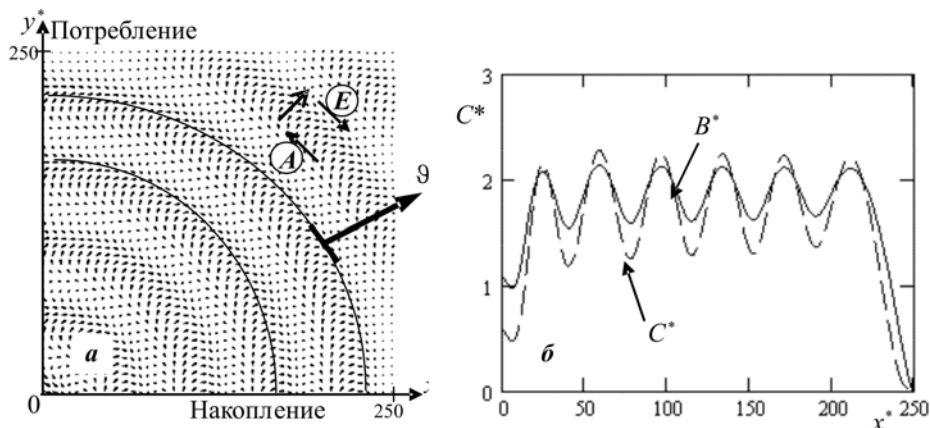


Рис. 5. Векторное поле эволюционного и устойчивого развития территории в сравнении с рис. 1 (а) и сечение проекции безразмерной стоимости ВРП C^* на ось накопления в момент времени $t = 4,5 \cdot 10^{-3} t_0$ (б).

Фиксируется на конечной стадии асимптотическое стремление стоимости к нулю. Параметры внешнего периодического поля: а) $Q_0^* = 200$, $\omega^* = 1$; б) $Q_0^* = 400$, $\omega^* = 45$

Выводы

Предложенная экономико-математическая модель описывает не только характеристики накопления и потребления, но и динамическую связь между ними в условиях ограниченных ресурсов и возможности их выбора в форме подвижных кривых производственных возможностей. На основе векторных представлений дается теоретическое толкование экономического роста ВРП как процесса с обострением. Модель содержит возможность описания не только циклических макроэкономических процессов ВРП, но и периодов его интенсивного роста и перехода к кризису. Она позволяет проводить рассмотрение как средних циклов, так и длинных волн. В результате создаются предпосылки для описания ВВП страны в целом при $K \neq const$.

Система уравнений совместно с начальными и граничными условиями численно решалась с помощью программного продукта [7], а графические построения выполнялись в среде *Mathcad 2001*.

Авторы признательны Е.Г. Анимиде, А.Л. Мызину, Н.Л. Никулиной за обсуждение результатов, С.А. Охотникову за совместную работу по выполнению численных расчетов системы уравнений и графическое представление результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аткиссон А.* Поверьте Кассандре. Как быть оптимистом в пессимистическом мире / Перс англ. В.В. Дедюхина. М.: БИНОМ, 2012. 264 с.
2. *Белоцерковский О.М.* Экономическая синергетика. Вопросы устойчивости / О.М. Белоцерковский, Г.П. Быстрай, В.Р. Цибульский // Новосибирск: Наука, 2006. 116 с.
3. *Быстрай Г.П.* Новые экономические теории: физическая экономика / Г.П. Быстрай, А.А. Куклин, В.Р. Цибульский // Труды II Всерос. симп. по экономической теории. 2006. С. 58–83.
4. *Быстрай Г.П.* Термодинамика необратимых процессов в открытых системах. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 264 с.
5. *Быстрай Г.П.* Методы нелинейной динамики в анализе и прогнозировании экономических систем регионального уровня / Г.П. Быстрай, Л.А. Коршунов, И.А. Лыков, Н.Л. Никулина, С.А. Охотников // Журнал экономической теории. 2010. № 3. С. 103–114.
6. *Барро Дж.* Сала-и-Мартин. Экономический рост / Перев. с англ. А.Н. Моисеева, О.В. Капустиной. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. 824 с.
7. *Быстрай Г.П., Лыков И.А.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012615414 «Оценка рисков, нелинейный анализ и прогнозирование для длинных временных рядов экономических показателей». Роспатент. Зарегистрировано 15 июня 2012 г.
8. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978. 248 с.
9. *Гурбан И.А.* Теоретико-методологический подход к оценке состояния человеческого капитала регионов России / И.А. Гурбан, А.Л. Мызин // Журнал экономической теории. 2011. № 2. С. 21–31.
10. *Денисон Э.Ф.* Экономический рост // Анализ экономического роста США с 1929 по 1969. М. 1974. 175 с.
11. *Диксон Дж.* Новый взгляд на богатство народов. Индикаторы экологически устойчивого развития / Дж. Диксон, Ж. Бэккес, К. Гамильтон, А. Кант, Э. Латц, С. Педжиола, Ж. Хи; Пер. с англ. В.Н. Сидоренко, Т.А. Глушко; Научн. ред-ры перевода и авторы предисловия С.Н. Бобылев, В.Н. Сидоренко. М.: Центр подготовки и реализации международных проектов технического содействия, Проект ГЭФ «Сохранение биоразнообразия», 2000. 175 с.
12. *Коршунов Л.А.* Детерминированное непериодическое изменение регионального валового продукта / Л.А. Коршунов, Г.П. Быстрай // Экономика региона. 2010. № 1. С. 196–201.
13. *Корн Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1973. 829 с.

14. *Kuznets S. Economic Growth of Nations: Total Output and Production Structure*, Harvard University Press, Cambridge, 1971. 363 p.
15. *Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент*. М.: КомКнига/URSS, 2005. 308 с.
16. *Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику*. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 256 с.
17. *Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А. Б. Потапов*. М.: УРСС, 2002. 356 с.
18. *Marshall A. Principles of Economics (Great Minds Series)*. Prometheus Books; Revised edition, 1997. 319 p.
19. *Медоуз Д. Пределы роста: 30 лет спустя / Д. Медоуз, Й. Рандерс, Ден. Медоуз; Перс англ. Е. Оганесяна*. М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2013. 358 с.
20. *Мызин А.Л. Проблемы оценки человеческого капитала в контексте исследования национального богатства регионов России / А.Л. Мызин, И.А. Гурбан // Экономика региона*. 2011. № 1. С. 104–110.
21. *Николис Г. Познание сложного / Г. Николис, И. Пригожин*. М.: Мир, 1990. 342 с.
22. *Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Г. Николис, И. Пригожин / М.: Мир, 1973. 511 с.*
23. *Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР*. М.: Наука, 1979. С. 38–49.
24. *Самарский А.А. Информатика и научно-технический прогресс / А.А. Самарский, С. П. Курдюмов, Т. С. Ахромеева и др.* М.: Наука, 1987. С. 69–91.
25. *Самарский А.А. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание*. М.: Наука, 1988. 192 с.
26. *Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов*. М.: Соцэкгиз, 1962. 654 с.
27. *Хакен Г. Синергетика*. М.: Мир, 1980. 404 с.
28. *Эклунд К. Эффективная экономика — шведская модель*. М.: Экономика, 1991. 349 с.
29. *Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур: Пер. с нем. / В. Эбелинг*. М.: Мир, 1979. 367 с.
30. *Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems // Progr. Theor. Phys.* 54. 1975. P. 6870–6990.
31. *Samuelson P. A. Economics: An Introductory Analysis / Алгон*, 1993. 740 с.
32. *Валовый региональный продукт как обобщающий показатель экономической деятельности региона*. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://www.ekonomika-st.ru/ekonomika/reg-ekonomika/reg-ekonomika-2.html>.
33. *Быстраяй Г.П. Модель динамики ВВП с учетом накопления и потребления // Материалы II Всерос. симпозиума по региональной экономике*. Т. 2. 24–26 сентября 2013 г. Екатеринбург. 238 с. С. 110–114.

Bystray G.P., Lykov I.A.

SYNERGETIC DYNAMICS OF GRP GROWTH CONSIDERING ACCUMULATION AND CONSUMPTION

Paper is devoted to the construction of dynamical model of GRP with the consideration of accumulation and consumption in the presence of sources and sinks. This study used the first principle — there are limitations of regional resources in the economic system, as well as limitations of primary factors — accumulation and consumption, and there is also a possibility to direct previously accumulated part on consumption; the second is anthropogenic — the periods of development characterized by the human desires to maximize consumption. As part of the problems with peaking synergetic model of market disequilibrium for GRP was developed as a system of two nonlinear differential equations describing the selforganization of the market structures.

Regional economics, synergetics, the problem with peaking, consumption, accumulation, regional processes.