

В.А. Галкин, А.А. Епифанов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ¹

Использование современных ЭВМ позволяет моделировать сложные течения несжимаемой жидкости путем решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Построение численных алгоритмов для нестационарных уравнений Навье — Стокса является весьма актуальной задачей. Объектом данной работы выступает численное моделирование плоского движения несжимаемой жидкости в области, имеющей форму круга или прямоугольника. Численные расчеты проводились для нескольких значений числа Рейнольдса, и для интегрирования по времени использовалась схема Рунге-Кутты 2 порядка.

Численное моделирование, плоское течение несжимаемой жидкости.

Задача рассматривается в декартовых координатах (x, y) в ограниченной области $(x, y) \in D$. В случае, когда расчетная область имеет форму круга, граница S области D имеет вид: $S = \partial D = \{x^2 + y^2 = R^2\}$. Когда расчетная область имеет форму прямоугольника область D имеет вид $D = \{[0, x_{\max}] \times [0, y_{\max}]\}$. По всей области D задаются начальные условия, на границе S — граничные условия.

Для рассмотрения эффективности численного решения двумерных уравнений системы Навье — Стокса методом конечных элементов рассмотрим следующую тестовую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} &= \varepsilon \Delta U, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} &= \varepsilon \Delta V, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где $U = U(x, y, t)$, $V = V(x, y, t)$, V — неизвестные компоненты функции скорости, $P = P(x, y, t)$ — неизвестная функция давления, (x, y) — двумерная координата. Поле скоростей описывается двумя функциями:

$$\begin{aligned} V &= V(x + \psi(t), y + \varphi(t)), \\ U &= U(x + \psi(t), y + \varphi(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — гармонические функции. Поле давления описывается выражением:

$$P = \frac{1}{2}(U^2 + V^2) - \dot{\varphi} \cdot V - \dot{\psi} \cdot U. \quad (3)$$

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант № 13-01-12051 офи_м.

Координаты центра ротора:

$$\begin{aligned}x(t) &= \psi(t), \\y(t) &= \varphi(t),\end{aligned}\tag{4}$$

Из условия потенциальности течения следует:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \partial U / \partial x + \partial V / \partial y &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Пусть $U = -y + \varphi(t)$, $V = x + \psi(t)$, $P = 0,5 \cdot (U^2 + V^2) - \dot{\varphi}(t) \cdot V + \dot{\psi}(t) \cdot U$. Тогда начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}U_{|t=0} &= -y + \varphi(0), \\ V_{|t=0} &= x + \psi(0), \\ P_{|t=0} &= \frac{1}{2}(U^2 + V^2) - \dot{\varphi}(0) \cdot V - \dot{\psi}(0) \cdot U.\end{aligned}\tag{6}$$

Граничные условия выберем в виде следа решения системы уравнений Навье — Стокса на границе области S :

$$\begin{aligned}U_{|s} &= -y + \varphi(t), \\ V_{|s} &= x + \psi(t), \\ P_{|s} &= \frac{1}{2}(U^2 + V^2) - \dot{\varphi}(t) \cdot V - \dot{\psi}(t) \cdot U.\end{aligned}\tag{7}$$

Расчетная область представляет собой двумерную область Ω , разбитую на треугольники T_j $\Omega = \bigcup_{j=1}^N T_j$. При этом треугольники могут иметь общие вершины и ребра, но не могут пересекаться по двумерным областям.

Генерация триангулированных сеток для двумерной дискретизации уравнений Навье — Стокса проводилась двумя способами: использованием специальных программных комплексов: бесплатных и условно-бесплатных и с помощью шаблона триангуляции круга.

Использование шаблона позволяет получить сетки достаточно высокого качества, при этом круг делится на треугольные сектора. Количество секторов может варьироваться от 4 до 7 (меньше или больше может привести к значительным искажениям сетки).

Размещение узлов внутри секторов производится с помощью концентрических окружностей, причем на каждой последующей окружности количество узлов увеличивается на количество секторов. Если распределять узлы на отрезках дуг равномерно, то полярные координаты узлов можно вычислять по индексам с помощью формул вида:

$$\rho_{ij} = R_i, \quad \varphi_{ij} = 2\pi \frac{j}{iN}, \quad i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots, iN\tag{8}$$

где i — номер окружности, R_i — радиус окружности, j — номер узла, N — количество секторов. На рис. 1 показан пример сетки на основе 6 секторов.

Задача введения треугольной сетки в область, имеющую прямоугольную форму, решалась путем последовательного наложения треугольного шаблона по всей расчетной области. Пример построенной сетки можно увидеть на рис. 2.

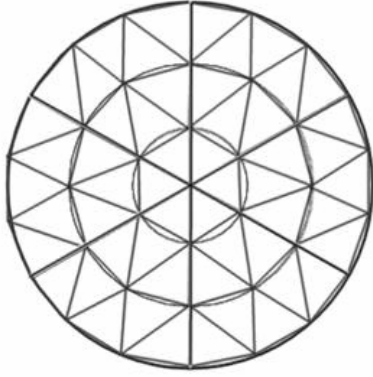


Рис. 1. Построение сетки на основе 6 секторов

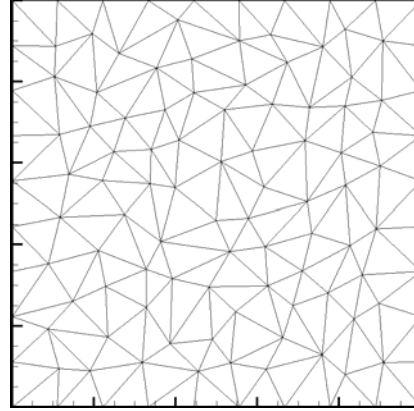


Рис. 2. Построение сетки с помощью MeshGen

Для генерации многозонных двумерных сеток использовался модуль MeshGen программного комплекса TecPlot 360. Кроме того, есть возможность генерации как структурированных так и не структурированных сеток. Для данной задачи использовалась генерация неструктурированных сеток в области имеющей форму прямоугольника.

Нестационарную задачу (1) с начальными тестовыми условиями (6) и граничными условиями (7) будем решать при помощи частично неявной разностной схемы и метода Рунге — Кутты 2 порядка на сетке, состоящей из линейных треугольных конечных элементов, общей для скоростей и давления:

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial U^n}{\partial y} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} &= \varepsilon \Delta \bar{U}^{n+1}, \\ \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} + U^n \frac{\partial V^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial V^n}{\partial y} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} &= \varepsilon \Delta \bar{V}^{n+1}, \\ \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения системы (9) относительно поля скоростей U, V необходимо определить неизвестное давление P на следующем слое по времени. Давление можно получить, решив уравнение Пуассона сложением первых трех уравнение системы (9), продифференцированных по x и y соответственно. Уравнение Пуассона сводится к виду:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial V^n}{\partial y} + \frac{\partial U^n}{\partial y} \frac{\partial V^n}{\partial x}. \quad (10)$$

Заменим уравнение неразрывности (9) в системе на уравнение Пуассона (10). Запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial U^n}{\partial y} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} &= \varepsilon \Delta \bar{U}^{n+1}, \\
\frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} + U^n \frac{\partial V^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial V^n}{\partial y} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} &= \varepsilon \Delta \bar{V}^{n+1}, \\
\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} &= \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial V^n}{\partial y} + \frac{\partial U^n}{\partial y} \frac{\partial V^n}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Обозначим через $[F_1]$ выражение $U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial U^n}{\partial y}$. Аналогично через $[F_2]$

обозначим: $U^n \frac{\partial V^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial V^n}{\partial y}$, через $[F_{31}]$ — выражение:

$\frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial V^n}{\partial y} + \frac{\partial U^n}{\partial y} \frac{\partial V^n}{\partial x}$. Обозначим через $[C]$ матрицу демпфирования, учи-

тывающую изменения скорости во времени, $[K]$ — матрицу жесткости, $[F]$ — вектор-столбец нагрузки, $[U]$ — искомый вектор столбец значений компонент скорости в узлах сетки, $[P]$ — искомый вектор столбец значений давления. Запишем систему уравнений (11) в матричном виде:

$$[C] \frac{\partial \{U^{n+1}\}}{\partial \tau} + [K] \{U^{n+1}\} + [K] \{P^{n+1}\} + [F] = 0. \tag{12}$$

Для интегрирования (15) по времени использовалась неявная конечно-разностная схема

$$([C]/\tau + [K]) \{U^{n+1}\} + [K] \{P^{n+1}\} = ([C]/\tau) \{U^n\} - [F], \tag{13}$$

и метод Рунге-Кутты 2 порядка:

$$([C]/\tau + [K]) \{U^1\} + [K] \{P^1\} = ([C]/\tau) \{U^n\} - [F], \tag{14}$$

$$([C]/\tau + [K]) \{U^2\} + [K] \{P^2\} = ([C] \cdot 3/4\tau) \{U^n\} + ([C]/4\tau) \{U^n\} - [F], \tag{15}$$

$$([C]/\tau + [K]) \{U^{n+1}\} + [K] \{P^{n+1}\} = ([C]/3\tau) \{U^n\} + ([C] \cdot 2/3\tau) \{U^2\} - \frac{2}{3} [F]. \tag{16}$$

Для первого теста решалась задача (1)–(4) со следующими параметрами и граничными условиями: размер сетки с треугольными элементами равен 600, число узлов сетки равно 331, шаг по времени $\tau = 0,001$; $\varepsilon = 1/Re$. В качестве начальных условий использовались условия (6), в качестве граничных — условия (7). Задача решалась для числа Рейнольдса $Re = 10$. Число итераций по времени составило 1000, затраченное время для расчетов: 53,85 сек.

Для второго теста использовалась та же сетка с 600 элементами, шаг по времени $\tau = 0,00001$; $\varepsilon = 1/Re$. В качестве начальных условий использовались условия (6), в качестве граничных — условия (7). Задача решалась для числа Рейнольдса $Re = 50$. Число итераций по времени составило 100000, затраченное время для расчетов: 11945 сек (~3 часа), см, рис. 3–14.

1. Построен алгоритм решения двумерной нестационарной системы уравнений Навье — Стокса на треугольной неструктурированной сетке, общей для скоростей и давления. Интегрирование по времени проводилось схемой Рунге — Кутты 2 порядка.

2. Проведены численные расчеты для задачи (1), (6), (7) в областях, имеющих форму круга и прямоугольника для чисел Рейнольдса 10, 50 (рис. 3–14).

3. Метод конечных элементов хорошо распараллеливается: расчет базиса в ячейке, формирование матриц жесткости, демпфирования, решения СЛАУ может осуществляться как на отдельном процессоре (CPU), так и на графическом процессоре (GPU) с использованием технологии CUDA.

$$Re = 10, R = 1, T = 0.3, \tau = 0.001, \varphi(\tau) = \cos(\tau), \psi(z) = \sin(\tau).$$

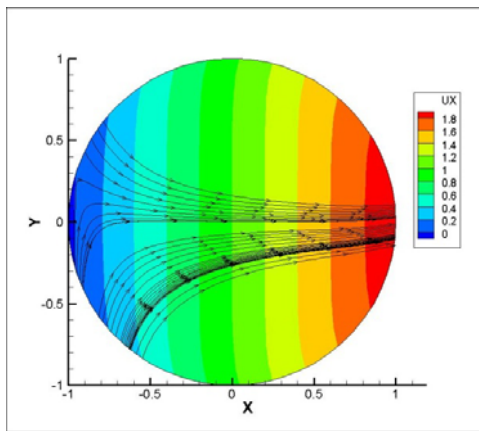


Рис. 3. Компонента скорости U_x (численный расчет)

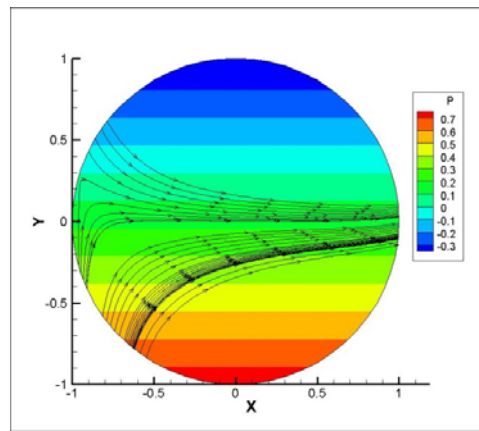


Рис. 4. Давление (численный расчет)

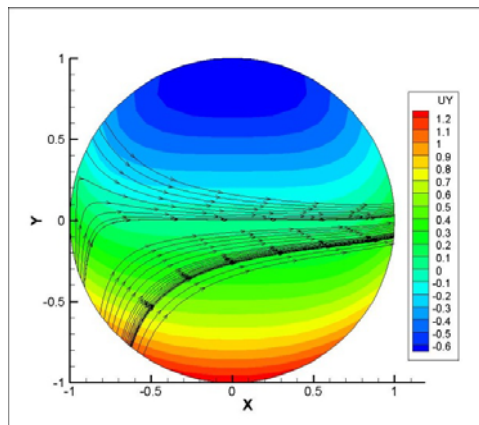


Рис. 5. Компонента скорости U_y (численный расчет)

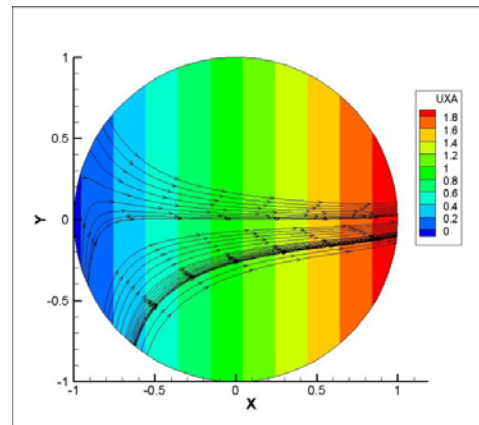


Рис. 6. Компонента скорости U_x (аналитическое решение)

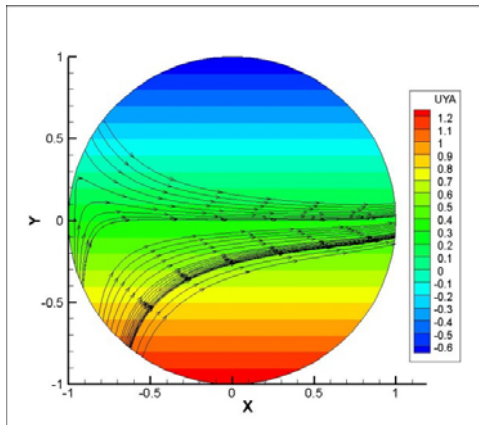


Рис. 7. Компонента скорости U_y
(аналитическое решение)

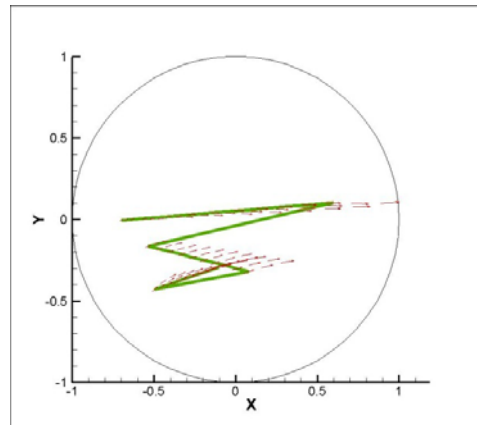


Рис. 8. Путь частицы
(численный расчет)

$Re = 50, R = 1, T = 1, \tau = 0,00001 \varphi(t) = t^2 \psi(t) = t^2.$

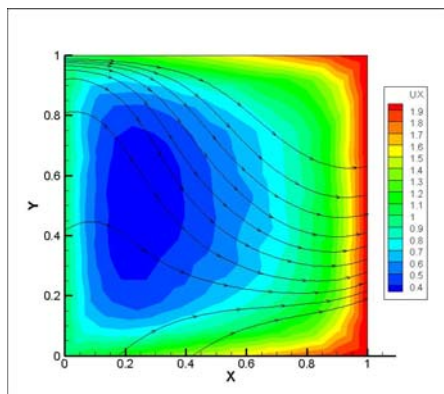


Рис. 9. Компонента скорости U_x
(численный расчет)

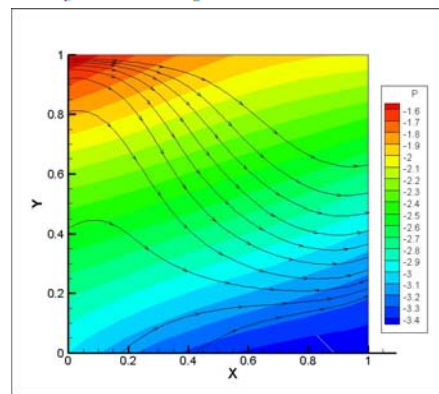


Рис. 10. Давление
(численный расчет)

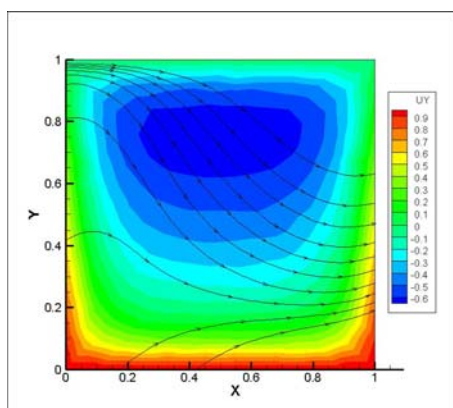


Рис. 11. Компонента скорости U_y
(численный расчет)

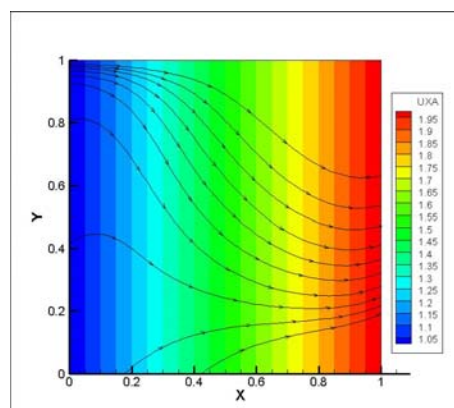


Рис. 12. Компонента скорости U_x
(аналитическое решение)

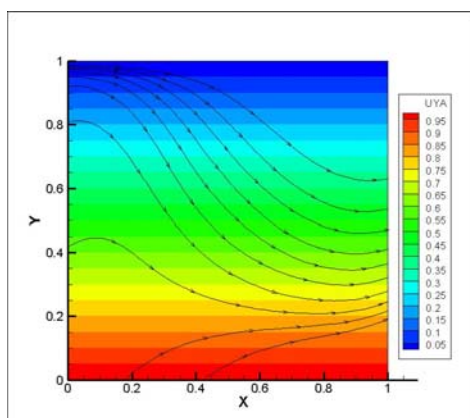


Рис. 13. Компонента скорости U_y
(аналитическое решение)

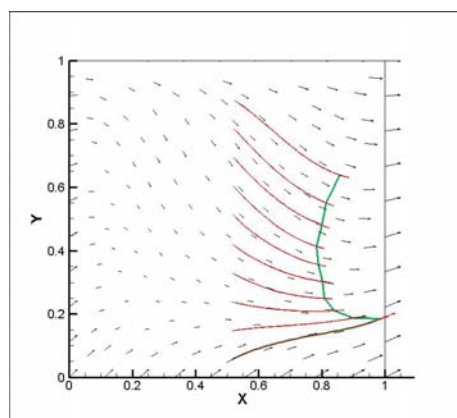


Рис. 14. Путь частицы
(численный расчет)

ЛИТЕРАТУРА

1. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: http://www.keldysh.ru/papers/2006/prep10/prep2006_10.html#_Тос116470155.
2. Торгашев В.А. Метод разностных потенциалов для численного решения уравнений Навье — Стокса // Математическое моделирование, 1998, Т.1 0, № 8. С. 81–102.
3. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов; Д. Норри, Ж. де Фриз М.: Мир. 1981. 304 с.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Глеркина [Текст] К. Флетчер; пер. с англ. Л.В. Соколовской, под ред. В.П. Шидловского. М.: Мир, 1988. 352 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. О. Зенкевич; пер. с англ. Под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1975. 541 с.
6. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Л. Сегерлинд; пер. с англ. А.А. Шестакова, под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1979. 392 с.
7. Волков П.К., Переверзев А.В. Метод конечных элементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «скорости-давление»// Математическое моделирование. 2003. Т. 15. № 3. С.15–28.
8. Smith L.M. Programming the finite element method. Second Edition. L.M. Smith, D.V. Griffiths; John Wiley and Sons LTD; 1988. 469 p.

Galkin V.A., Epifanov A.A.

NUMERICAL MODELING OF A FLAT FLOW OF INCOMPRESSIBLE LIQUID

Use of modern PC allows modeling of uncompressed liquid complex flow with systems of partial differential equations. Building an effective algorithm for unsteady Navier – Stokes equations is still actual task. The purpose of this work is numerical modeling of uncompressed liquid flat flow in an area with circle or rectangle form. Numerical computing was done for several values of Reynolds number and for integration Rung-Kutta second order scheme was used.

Numerical modeling, uncompressed liquid flat flow.