

И.В. Бычин, А.В. Гореликов, А.В. Ряховский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

Рассматривается алгоритм для численного решения задач естественной конвекции в сферических слоях с вращающимися границами. Предложенный алгоритм основан на учете закона сохранения момента импульса. Представлены результаты вычислительных экспериментов по исследованию естественной конвекции в тонких сферических слоях, проведенных с использованием разработанного метода.

Численное моделирование, естественная конвекция, сферический слой.

Для численного решения задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях авторами был разработан программный комплекс [1], реализующий метод контрольного объема [2] в сферических координатах и использующий стандарты OpenMP и MPI для осуществления параллельных вычислений. В данной работе описывается алгоритм для численного моделирования естественной конвекции во вращающемся сферическом слое, границы которого являются твердыми оболочками и могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости.

Рассматривается сферический слой толщиной H с внутренним радиусом r_{in} , расположенный в центральном поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$, $g = const > 0$. Слой заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Температура внутренней границы T_{in} выше температуры T_{out} внешней границы, T' — их разность. Внешняя и внутренняя границы сферического слоя могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. $\boldsymbol{\omega}_{out}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}_{in}(t)$ — угловые скорости вращения соответственно внешней и внутренней границ слоя. В качестве математической модели используется система уравнений естественной конвекции в приближении Буссинеска в инерциальной системе отсчета:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \text{div}\boldsymbol{\sigma} - \beta T'\mathbf{g},$$

$$\text{div}\mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{DT'}{Dt} = \alpha\Delta T'.$$

Покомпонентно данная система уравнений запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} - \frac{v^2 + w^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nabla^2 u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(v\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \beta T'g,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)v + \frac{uv}{r} - \frac{ctg\theta}{r}w^2 = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)w + \frac{uw}{r} + \frac{vw}{r}ctg\theta = \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nabla^2 w + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{w}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T' = \alpha \nabla^2 T',$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Температура внутренней и внешней сфер постоянна, кроме того, на границе заданы условия прилипания для поля скоростей:

$$\mathbf{u}|_{r=r_{in}} = [\boldsymbol{\omega}_{in}(t), \mathbf{r}], \quad T'|_{r=r_{in}} = T_{in} - T_{out}, \quad \mathbf{u}|_{r=r_{in}+H} = [\boldsymbol{\omega}_{out}(t), \mathbf{r}], \quad T'|_{r=r_{in}+H} = 0.$$

В начальный момент времени сферический слой вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$. В качестве начального условия для температуры задается решение уравнения Лапласа в сферическом слое:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = [\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{r}], \quad T'|_{t=0} = (T_{in} - T_{out}) \left(\frac{r_{in} r_{out}}{rH} - \frac{r_{in}}{H} \right).$$

Безразмерные переменные вводятся по формулам:

$$R = r/H; \quad \tau = \alpha t/H^2; \quad \mathbf{U} = H\mathbf{u}/\alpha, \quad (\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_\varphi);$$

$$\boldsymbol{\Omega} = H^2\boldsymbol{\omega}/\alpha; \quad P' = H^2 p'/\alpha\mu; \quad P = P' + \frac{1}{2\text{Pr}} [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}]^2;$$

$$\Theta = T'/(T_{in} - T_{out}); \quad \mathbf{S} = \frac{\rho H^2 \boldsymbol{\sigma}}{\alpha\mu}.$$

Безразмерные параметры задачи: $A = r_{in}/H$ — аспектное отношение; $Ra = g\beta(T_{in} - T_{out})H^3/\alpha\nu$ — число Рэлея; $\text{Pr} = \nu/\alpha$ — число Прандтля; $J = I/\rho H^5$ — безразмерный момент инерции шара; $\Omega_0 = H^2\omega_0/\alpha$ — начальная угловая скорость вращения внешней границы сферического слоя. В безразмерных переменных система уравнений конвекции в приближении Буссинеска принимает вид:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{D\mathbf{U}}{D\tau} = \boldsymbol{\Omega}P + \text{div}\mathbf{S} + Ra\Theta\mathbf{e}_r,$$

$$\text{div}\mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{D\Theta}{D\tau} = \Delta\Theta.$$

Граничные условия преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{U}|_{R=A} = [\boldsymbol{\Omega}_{in}(\tau), \mathbf{R}], \quad \Theta|_{R=A} = 1, \quad \mathbf{U}|_{R=A+1} = [\boldsymbol{\Omega}_{out}(\tau), \mathbf{R}], \quad \Theta|_{R=A+1} = 0. \tag{2}$$

Начальные условия:

$$\mathbf{U}|_{\tau=0} = [\boldsymbol{\Omega}_0(\tau), \mathbf{R}], \quad \Theta|_{\tau=0} = \frac{A(A+1)}{R} - A.$$

Угловые скорости $\boldsymbol{\Omega}_{in}(\tau)$ и $\boldsymbol{\Omega}_{out}(\tau)$ находятся из уравнений движения внутреннего шара и внешнего твердого слоя:

$$J_{in} \frac{d\Omega_{in}}{d\tau} = \text{Pr} \iint_{S_{in}} [\mathbf{R}_{in}, \mathbf{f}_{in}]_z dS, \quad (3)$$

$$J_{out} \frac{d\Omega_{out}}{d\tau} = \text{Pr} \iint_{S_{out}} [\mathbf{R}_{out}, \mathbf{f}_{out}]_z dS, \quad (4)$$

где S_{in} , S_{out} — границы внутреннего шара и внешнего твердого слоя; \mathbf{f}_{in} , \mathbf{f}_{out} — силы трения, действующие на единицу площади S_{in} и S_{out} ; \mathbf{R}_{in} , \mathbf{R}_{out} — безразмерные радиус-векторы точек. Силы трения \mathbf{f}_{in} и \mathbf{f}_{out} можно выразить через компоненты тензора вязких напряжений и в результате уравнения (3, 4) примут следующий вид:

$$J_{in} \frac{d\Omega_{in}}{d\tau} = \text{Pr} A^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R} \right) \Big|_{R=A} \sin^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

$$J_{out} \frac{d\Omega_{out}}{d\tau} = -\text{Pr}(A+1)^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R} \right) \Big|_{R=A+1} \sin^2 \theta d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Используя граничные условия на скорость (2), уравнения (5, 6) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\Omega_{in}(\tau)}{d\tau} + \frac{8\pi}{3} C_{in} \Omega_{in}(\tau) = C_{in} F_{in}(\tau) \quad (7)$$

$$\text{где: } C_{in} = \frac{\text{Pr} A^3}{J_{in}}, \quad F_{in}(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_{R=A} \sin^2 \theta d\theta d\varphi.$$

$$\frac{d\Omega_{out}(\tau)}{d\tau} - \frac{8\pi}{3} C_{out} \Omega_{out}(\tau) = C_{out} F_{out}(\tau), \quad (8)$$

$$\text{где: } C_{out} = \frac{\text{Pr}(A+1)^3}{J_{out}}, \quad F_{out}(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_{R=A+1} \sin^2 \theta d\theta d\varphi.$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\Omega_{in}(\tau) = \Omega_{in}(\tau_0) \exp\left(-\frac{8\pi}{3} C_{in}(\tau - \tau_0)\right) + C_{in} \int_{\tau_0}^{\tau} F_{in}(\xi) \exp\left(-\frac{8\pi}{3} C_{in}(\tau - \xi)\right) d\xi. \quad (9)$$

Дискретный аналог выражения (9) используется при аппроксимации граничных условий на внутренней сфере в следующем виде:

$$\Omega_{in}(\tau) \approx \Omega_{in}(\tau_0) \exp\left(-\frac{8\pi}{3} C_{in} \Delta\tau\right) + \frac{3}{8\pi} \left(\frac{F_{in}(\tau) + F_{in}(\tau_0)}{2} \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{8\pi}{3} C_{in} \Delta\tau\right) \right), \quad (10)$$

где $\Delta\tau$ — шаг по времени ($\Delta\tau = \tau - \tau_0$).

Аналогичным образом выводится решение уравнения (8) и его дискретный аналог, использующийся для аппроксимации граничных условий на внешней сфере:

$$\Omega_{out}(\tau) = \Omega_{out}(\tau_0) \exp\left(\frac{8\pi}{3} C_{out}(\tau - \tau_0)\right) - C_{out} \int_{\tau_0}^{\tau} F_{out}(\xi) \exp\left(\frac{8\pi}{3} C_{out}(\tau - \xi)\right) d\xi,$$

$$\Omega_{out}(\tau) \approx \Omega_{out}(\tau_0) \exp\left(\frac{8\pi}{3} C_{out} \Delta\tau\right) + \frac{3}{8\pi} \left(\frac{F_{out}(\tau) + F_{out}(\tau_0)}{2}\right) \left(1 - \exp\left(\frac{8\pi}{3} C_{out} \Delta\tau\right)\right). \quad (11)$$

Пусть на момент времени τ_n известны поля скорости \mathbf{U}_n , температуры Θ_n и давления P_n . Система, состоящая из жидкого слоя и твердых оболочек, считается механически замкнутой, т.е.

$$L = L_{out} + L_{in} + L_{liq},$$

где L — момент импульса всей системы; L_{out} — момент импульса внешней твердой оболочки; L_{in} — момент импульса внутренней твердой оболочки; L_{liq} — момент импульса жидкости. Алгоритм решения задачи в случае вращения обеих границ сферического слоя состоит из следующих этапов:

1. Рассчитывается скорость вращения внутреннего ядра (10). Скорость вращения внешней границы находится из закона сохранения момента импульса:

$$L_{out} = L - L_{in} - L_{liq}, \quad \Omega_{out} = L_{out} / J_{out}.$$

2. По алгоритму SIMPLER [2] находится поле давления P^* и поле скоростей \mathbf{U}^* . Решается уравнение теплопереноса для нахождения распределения температуры Θ^* . Определяется момент импульса жидкости:

$$L_{liq} = \int_{G_L} RW^* \sin\theta dV.$$

3. Рассчитывается скорость вращения внешней границы (формула (11)). Скорость вращения внутреннего ядра находится из закона сохранения момента импульса:

$$L_{in} = L - L_{out} - L_{liq}, \quad \Omega_{in} = L_{in} / J_{in}.$$

4. По алгоритму SIMPLER находится поле давления P^{**} и поле скоростей \mathbf{U}^{**} . Решается уравнение теплопереноса для нахождения распределения температуры Θ^{**} . Определяется момент количества движения жидкости:

$$L_{liq} = \int_{G_L} RW^{**} \sin\theta dV.$$

5. Проверка сходимости. В качестве критериев сходимости используются максимальные по области невязки всех уравнений. Если критерии не удовлетворяются, то вновь выполняются шаги 1-4.

Если критерии сходимости удовлетворяются, то происходит переход на следующий временной слой τ_{n+1} : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}^{**}$, $P_{n+1} = P^{**}$, $\Theta_{n+1} = \Theta^{**}$. После этого этапы 1-5 повторяются.

Рассмотрим случай, когда сила трения может оказывать существенное влияние на скорость вращения как внутренней, так и внешней границы сферического слоя. В реальных физических объектах такая ситуация может возникнуть, когда момент инерции ядра сопоставим по величине с моментом инерции внешней оболочки. В частности, этому случаю соответствуют большие значения аспектного отношения, т.е. тонкие сферические слои. Предполагалось, что границы сферического слоя могут вращаться под действием сил

вязкого трения со стороны жидкости. Аспектное отношение в данном случае было равно $A = 3$. Считалось, что момент инерции жидкого слоя относительно оси z совпадает с моментами инерции внутреннего шара и внешней границы сферического слоя. В начальный момент времени скорости вращения внутренней и внешней сфер совпадали и были равны Ω_0 . Вычислительные эксперименты проводились при фиксированном числе Рэлея $Ra = 10^4$, а начальная безразмерная скорость вращения Ω_0 границ сферического слоя варьировалась в диапазоне от 30 до 100.

В случае $\Omega_0 = 30$ решение стационарно и осесимметрично (рис. 1, а, б). Тепловой поток и скорости вращения границ сферического слоя выходят на постоянные значения. При дальнейшем увеличении Ω_0 до 40 решение сохраняет осевую симметрию, но становится нестационарным.

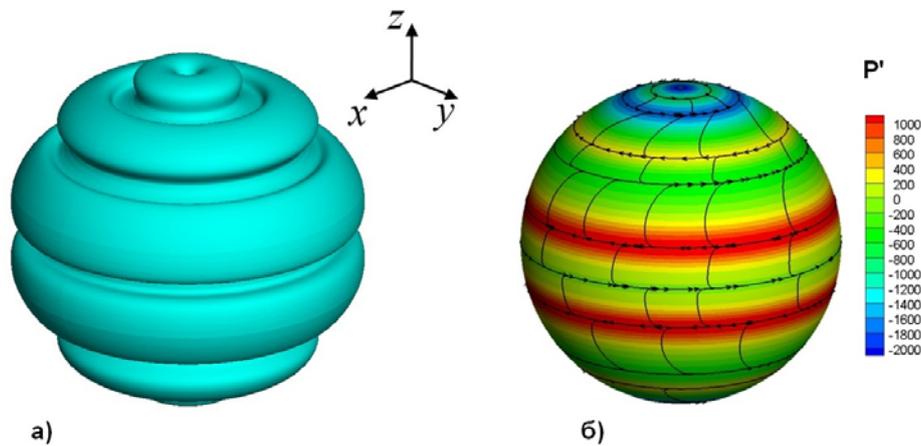


Рис. 1. Результаты для случая $\Omega_0 = 30$:
а) изоповерхность температуры $\Theta = 0.25$;
б) структура течения, цветом показано распределение давления P'

При $\Omega_0 \geq 50$ (рис. 2) конвекция переходит в режим периодических колебаний. В этом режиме локальные величины (температура, давление, компоненты скорости), тепловой поток и скорости вращения границ изменяются периодически (рис. 2, в, г.). Из распределения температуры (рис. 3, а) видно, что в областях высоких широт в северном и южном полушариях образуются восходящие потоки, а вблизи экватора конвективные течения слабы. Периодически у северного и южного полюсов образуются восходящие потоки жидкости, которые затем движутся вдоль полярного направления к экватору, где восходящие течения затухают (рис. 3, а–в).

Схожей структурой обладают решения, получаемые при $\Omega_0=60$ (рис. 4) и $\Omega_0=75$ (рис. 5). Решения по-прежнему осесимметричны, а характеристики и интегральные характеристики изменяются периодически. При увеличении начальной скорости вращения сферического слоя видно, что интенсивность конвекции снижается: уменьшаются линейные размеры конвективных валов (рис. 5, а) и разность между скоростями вращения внешней и внутренней границ становится менее значительной. При увеличении Ω_0 до 100 конвекция практически полностью затухает.

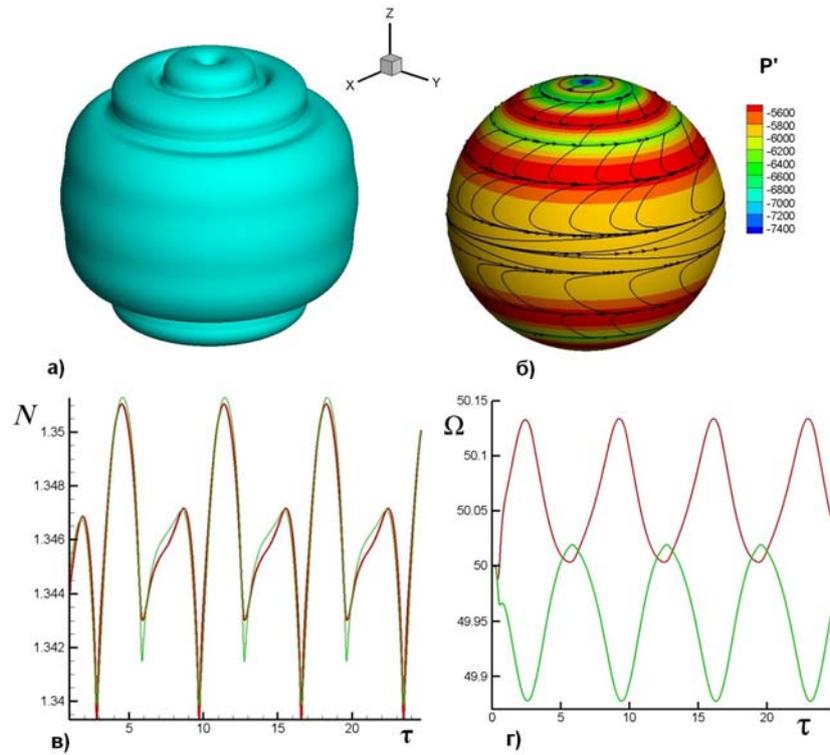


Рис. 2. Результаты для случая $\Omega_0 = 50$: а) изоповерхность температуры $\Theta = 0,25$; б) структура течения, цветом показано распределение давления P' ; в) графики зависимости от времени чисел Нуссельта на границах сферического слоя (красным цветом обозначена внутренняя граница, зеленым — внешняя); г) графики зависимости угловой скорости вращения границ сферического слоя от времени

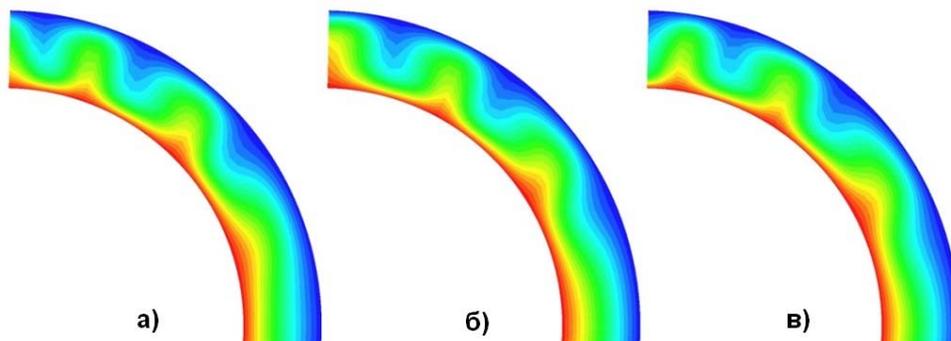


Рис. 3. Образование восходящего потока у северного полюса и его движение к экватору ($\Omega_0 = 50$): а) момент времени $\tau = 19,9$; б) $\tau = 22,7$; в) $\tau = 23,7$

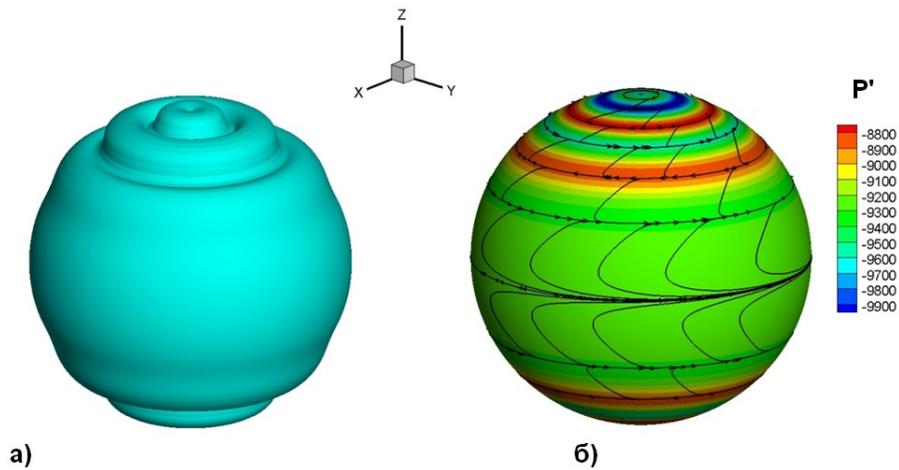


Рис. 4. Результаты для случая $\Omega_0 = 60$: а) изоповерхность температуры $\Theta=0.25$; б) структура течения (цветом показано распределение давления P')

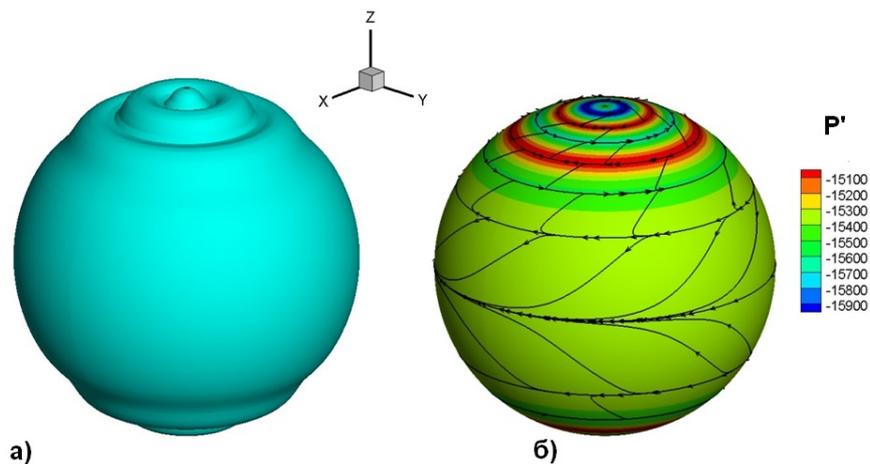


Рис. 5. Результаты для случая $\Omega_0=75$: а) изоповерхность температуры $\Theta=0.25$; б) структура течения (цветом показано распределение давления P')

Влияние начальной скорости вращения сферического слоя на скорости вращения границ оценивалось при помощи расчета относительной разности скоростей вращений внутренней и внешней границ слоя:

$$\delta\Omega = \frac{|\Omega_{in} - \Omega_{out}|}{\Omega_0} \cdot 100\%.$$

На рис. 6 приводятся характерные изоповерхности температуры и зависимость $\delta\Omega$ от Ω_0 . Как видно из рисунка, при увеличении начальной скорости вращения сферического слоя конвективные течения ослабевают, и влияние трения со стороны жидкости на скорости вращения границ уменьшается.

Заклучение

Проведено исследование естественной конвекции в тонком сферическом слое, обе границы которого могут вращаться под действием сил вязкого трения со стороны жидкости. Показано следующее.

1. Влияние силы трения на вращение внешней границы существенно, когда момент инерции внешней границы сопоставим по порядку величины с моментами инерции жидкого слоя и внутреннего ядра.

2. При малых значениях угловой скорости вращение задает выделенное направление, что снимает вырожденность решений и оказывает стабилизирующий эффект на структуру течения; при данных значениях угловой скорости ($\Omega_0 \leq 30$) формируются осесимметричные стационарные решения.

3. С увеличением скорости вращения ($30 < \Omega_0 < 100$) происходит дестабилизация течения, что приводит к получению периодических и непериодических нестационарных решений.

4. При дальнейшем росте скорости вращения ($\Omega_0 \geq 100$), вращение вновь стабилизирует течение, подавляя естественную конвекцию.

Таким образом, установлено разнонаправленное влияние вращения на режимы естественной конвекции во вращающихся слоях жидкости в центральном поле тяжести, т.е. в зависимости от значения момента импульса всей системы вращение может как стабилизировать конвективное течение, так и приводить к возникновению нестационарных режимов.

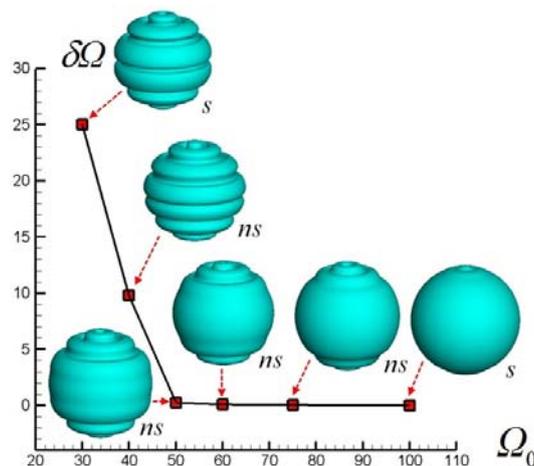


Рис. 6. Зависимость относительной разности скоростей $\delta\Omega$ вращения внутренней и внешней границ от начальной скорости вращения сферического слоя Ω_0 ; *s* — стационарные решения; *ns* — нестационарные решения

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12051 офи_м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бычин И.В., Гореликов А.В., Ряховский А.В. Тестирование программного комплекса для численного моделирования теплообмена и течения жидкости в сферических слоях // Вестник кибернетики. 2013. №12. С. 81–88.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

Bichin I.V., Gorelikov A.V., Ryakhovsky A.V.

**MODELLING OF NATURAL CONVECTION IN A SPHERICAL SHELL
WITH ROTATING BOUNDARIES**

Algorithm for numerical simulation of natural convection in spherical shells with rotating boundaries is described. The algorithm is based on the conservation of angular momentum. The results of numerical experiments on natural convection in thin spherical shells are presented.

Numerical simulation, natural convection, spherical shell.