

И.Г. Соловьев, Ю.А. Ведерникова, И.В. Гапанович

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИТОКА СКВАЖИНЫ НА ДВА ГОРИЗОНТА

Представлена линеаризованная конечномерная модель гидродинамики притока в вертикальной скважине, дренирующей два продуктивных горизонта. Рассматриваются вопросы идентификации гидродинамических параметров и формулируются требования, обеспечивающие идентифицируемость модели притока.

Скважина, продуктивный горизонт, гидродинамическая модель, идентификация, идентифицируемость.

Исследуются вопросы идентификации гидродинамических параметров притока в вертикальную скважину, дренирующую два продуктивных горизонта. На рис. 1 представлена конструктивная схема скважины, где вынесены основные обозначения параметров и переменных состояния конечномерной системы, аппроксимирующей распределенную плоскорадиальную динамику притока.

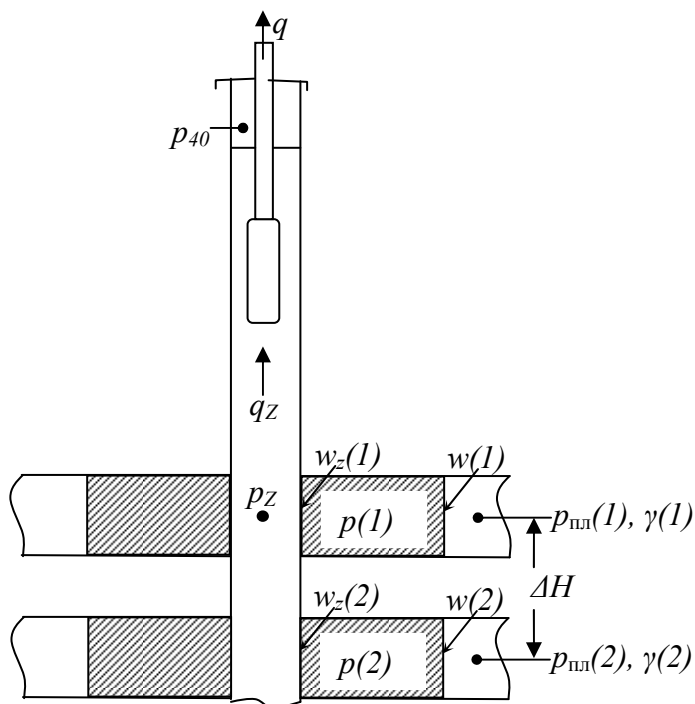


Рис. 1. Двухзбойная скважина

На рисунке выделены две призабойные зоны (ПЗ) со среднезональными давлениями $p(1, t)$ — для первого и $p(2, t)$ — для второго горизонта; $p_{пл}(1)$, $p_{пл}(2)$ — квазистатические давления подпора зон внешнего окаймления (т.е. среднезональные давления пластов), $p_z(t)$ — давление в забое напротив первого горизонта, а $p_z(2, t) = p_z(t) + \gamma(2)\Delta H$ — давление в забое работающей

скважины напротив второго горизонта. Здесь $\gamma(1)$, $\gamma(2)$ — удельные веса добываемого флюида, $q_z(1, t)$, $q_z(2, t)$ — объемные притоки в скважину, а $\gamma(2) \cdot \Delta H$ — гидростатическая разность забойных давлений между горизонтами.

Динамика гидробалансов для ПЗ может быть представлена системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_{\text{ж}}(1, t) = q(1, t) - q_z(1, t) \\ \dot{V}_{\text{ж}}(2, t) = q(2, t) - q_z(2, t), \end{cases}$$

где, ограничиваясь линейными законами гидроупругой фильтрации [1], имеем объемные притоки в ПЗ и забой скважины для первого

$$\begin{aligned} q(1, t) &= w(1) \cdot (p_{\text{пл}}(1) - p(1, t)), \\ q_z(1, t) &= w_z(1) \cdot (p(1, t) - p_z(t)), \end{aligned}$$

и второго

$$\begin{aligned} q(2, t) &= w(2) \cdot (p'_{\text{пл}}(2) - p'(2, t)), \\ q_z(2, t) &= w_z(2) \cdot (p'(2, t) - p_z(t)), \end{aligned}$$

горизонтов с гидропроводностями переходов $w(i)$ — «коллектор-ПЗ», $w_z(i)$ — «ПЗ-забой скважины» i -го горизонта, $p'_{\text{пл}}(2) = p_{\text{пл}}(2) - \gamma(2) \cdot \Delta H$, $p'(2, t) = p(2, t) - \gamma(2) \cdot \Delta H$ — зональные давления, приведенные к уровню первого горизонта, $V_{\text{ж}}(i, t)$ — гидроупругие объемы жидкости, заполняющие пустоты призабойных зон, определяемые выражением

$$V_{\text{ж}}(i, t) = m(i)V(i)(1 + \beta_{\text{пл}}(i)(p(i, t) - p_{\text{пл}}(i))),$$

в котором $V(i)$ — пространственный объем ПЗ пористостью $m(i)$ с коэффициентом гидроупругости среды $\beta_{\text{пл}}(i)$.

С учетом введенных определений приближенная линеаризованная конечномерная модель гидродинамики притока может быть представлена системой уравнений

$$\begin{cases} (T(1)D + 1)p(1, t) = (1 - \mu(1))p_{\text{пл}}(1) + \mu(1)(1)p_z(t); \\ (T(2)D + 1)p'(2, t) = (1 - \mu(2))p'_{\text{пл}}(2) + \mu(1)(2)p_z(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $D := d/dt$ — оператор дифференцирования [2];

$T(i) = m(i)\beta_{\text{пл}}V(i)/(w(i) + w_z(i))$ — постоянная времени призабойной зоны i -го горизонта;

$\mu(i) = w_z(i)/(w(i) + w_z(i))$ — долевого коэффициент связи переменных i -го горизонта.

В рамках вышеизложенного объемный и весовой притоки в скважину вводятся выражениями

$$\begin{aligned} q_z(t) &= w_z(1) \cdot (p(1, t) - p_z(t)) + w_z(2) \cdot (p'(2, t) - p_z(t)), \\ m_z(t) &= \gamma(1)w_z(1) \cdot (p(1, t) - p_z(t)) + \gamma(2)w_z(2) \cdot (p'(2, t) - p_z(t)). \end{aligned} \quad (2)$$

Инициализация переходных режимов, связанная с изменением уровней отборов, учитывается во входных вариациях забойного давления — $p_z(t)$.

Нижеизложенное исследует вопросы оценивания параметров притока¹

$$\langle w_z(i), w_{\text{пл}}(i), p_{\text{пл}}^{\bullet}(i), \gamma(i), i \in \{1, 2\} \rangle, \quad (3)$$

двузабойной скважины (1) по данным контроля возмущенных входе-выходных переменных состояния (2)

$$I = \langle p_z(k), q_z(k), m_z(k), k \in K \rangle \quad (4)$$

в дискретные моменты времени t_k , ($t_{k+1} = t_k + \Delta t$, $x(t_k) = x(k)$), в предположении, что показатели длительности переходных процессов: $T(1)$ и $T(2)$ априорно даны. В определении (3) коэффициент продуктивности i -го притока $w_{\text{пл}}(i)$ рассчитывается по выражению

$$w_{\text{пл}}(i) = w_z(i)w(i)/(w_z(i) + w(i)) = w_z(i)(1 - \mu(i)) \quad (5)$$

Для построения МНК (метод наименьших квадратов) алгоритма оценивания воспользуемся формальной алгеброй линейных дифференциальных операторов [3] и преобразуем (1) к виду

$$p(i, t) = (1 - \mu(i))p_{\text{пл}}^{\bullet}(i) + \mu(i)p_z(i, t), \quad i \in \{1, 2\},$$

где $p_z(i, t)$ — функция, восстанавливаемая на выходе фильтра

$$p_z(i, t) = \frac{1}{T(i)D + 1} p_z(t). \quad (6)$$

Подставляя результат преобразования в (3), приходим к модели притока в форме линейной регрессии

$$q_z(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{v}(k), \quad m_z(k) = \mathbf{a}^T \mathbf{v}(k), \quad (7)$$

записанных в дискретном времени моментов измерений (4). В условиях (4), (6) типовая процедура МНК оценивания [4] сводится к разрешению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F\hat{\mathbf{c}} &= \mathbf{b}_q, \quad F\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{b}_m, \\ F &= \sum_{k \in K} \mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)^T, \\ \mathbf{b}_q &= \sum_{k \in K} q_z(k)\mathbf{v}(k), \\ \mathbf{b}_m &= \sum_{k \in K} m_z(k)\mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (8)$$

где вектор регрессоров и искомых параметров имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k) &= [1 \quad p_z(1, k) \quad p_z(2, k) \quad -p_z(k)]^T, \\ \mathbf{c} &= [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T, \quad \mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T. \end{aligned}$$

¹ Точка на месте показателя степени (например p^{\bullet}) — любой из ранее используемых символов на данной позиции.

$$\begin{cases} c_0 = w_{\text{пл}}(1)p_{\text{пл}}(1) + w_{\text{пл}}(2)p'_{\text{пл}}(2), \\ c_1 = w_z(1) - w_{\text{пл}}(1), \\ c_2 = w_z(2) - w_{\text{пл}}(2), \\ c_3 = w_z(1) + w_z(2). \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = \gamma(1)w_{\text{пл}}(1)p_{\text{пл}}(1) + \gamma(2)w_{\text{пл}}(2)p'_{\text{пл}}(2), \\ a_1 = \gamma(1)(w_z(1) - w_{\text{пл}}(1)), \\ a_2 = \gamma(2)(w_z(2) - w_{\text{пл}}(2)), \\ a_3 = \gamma(1)w_z(1) + \gamma(2)w_z(2). \end{cases} \quad (9)$$

Помимо общих требований к информативности и длительности наблюдений возмущенных режимов эксплуатации скважин, идентифицируемость (степень обусловленности матрицы F) модели притока в форме (7) относительно параметров \mathbf{c} и \mathbf{a} зависит от меры близости динамических свойств призабойных зон $T(1)$, $T(2)$, иными словами, от степени различимости переменных состояния $p_z(1, t)$, $p_z(2, t)$. В случае близости параметров $T(1)$ и $T(2)$ формируемые согласно (6) сигналы

$$p_z(1, t) \approx p_z(2, t) = \frac{1}{T(i)D+1} p_z(t)$$

становятся плохо различимыми, и модель регрессии (7) преобразуется к упрощенному виду

$$q_z(k) = c_0 + c'_4 p_z(1, k) - c_3 p_z(k), \quad m_z(k) = a_0 + a'_4 p_z(1, k) - a_3 p_z(k) \quad (10)$$

с укороченными векторами регрессоров и параметров

$$\mathbf{v}_r(k) = [1 \quad p_z(1, k) \quad -p_z(k)]^T, \\ \mathbf{c}_r = [c_0 \quad c'_4 \quad c_3]^T, \quad \mathbf{a}_r = [a_0 \quad a'_4 \quad a_3]^T$$

где $c'_4 = c_1 + c_2 = c_3 - w_{\text{пл}}(1) - w_{\text{пл}}(2)$,

и $a'_4 = a_1 + a_2 = a_3 - \gamma(1)w_{\text{пл}}(1) - \gamma(2)w_{\text{пл}}(2)$.

Укороченная система уравнений, связывающая параметры \mathbf{c}_r , \mathbf{a}_r с исходными параметрами (3) системы (1, 2, 5), приобретает вид

$$\begin{cases} c_0 = w_{\text{пл}}(1)p_{\text{пл}}(1) + w_{\text{пл}}(2)p'_{\text{пл}}(2), \\ c_4 = w_{\text{пл}}(1) + w_{\text{пл}}(2), \\ c_3 = w_z(1) + w_z(2). \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = \gamma(1)w_{\text{пл}}(1)p_{\text{пл}}(1) + \gamma(2)w_{\text{пл}}(2)p'_{\text{пл}}(2), \\ a_4 = \gamma(1)w_{\text{пл}}(1) + \gamma(2)w_{\text{пл}}(2), \\ a_3 = \gamma(1)w_z(1) + \gamma(2)w_z(2). \end{cases} \quad (11)$$

где $c_4 = c_3 - c_1 - c_2$, $a_4 = a_3 - a_1 - a_2$.

МНК-оценки параметров укороченной модели (10)

$$F_r \hat{\mathbf{c}}_r = \mathbf{b}_c, \quad F_r \hat{\mathbf{a}}_r = \mathbf{b}_r,$$

$$F_r = \sum_{k \in K} \mathbf{v}_r(k) \mathbf{v}_r(k)^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{b}_c = \sum_{k \in K} q_z(k) \mathbf{v}_r(k), \quad \mathbf{b}_r = \sum_{k \in K} m_z(k) \mathbf{v}_r(k),$$

имеют более высокие показатели устойчивости, чем оценки алгоритма (8).

Для анализа условий разрешимости систем уравнений (9) и (11) относительно группы (3) исходных параметров притока проведем следующие построения. Согласно ранее принятых обозначений введем определения для векторов и матриц

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{\text{пл}} = \begin{bmatrix} w_{\text{пл}}(1) \\ w_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_z = \begin{bmatrix} w_z(1) \\ w_z(2) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{h}_1 &= \begin{bmatrix} c_4 \\ a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} c_0 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_4 = \begin{bmatrix} c_4 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_5 = \begin{bmatrix} c_3 \\ a_3 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{h}_6 &= \begin{bmatrix} c_4 \\ c_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_7 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_0 \end{bmatrix}, \\
P &= \begin{bmatrix} p_{\text{пл}}(1) & 0 \\ 0 & p'_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix}, \quad \Gamma^T = [\mathbf{1} \quad \boldsymbol{\gamma}], \quad W^T = [\mathbf{w}_{\text{пл}} \quad \mathbf{w}_z].
\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда согласно (11) можно записать

$$\Gamma \mathbf{w}_{\text{пл}} = \mathbf{h}_1, \quad \Gamma P \mathbf{w}_{\text{пл}} = \mathbf{h}_2. \tag{14}$$

Отсюда $\mathbf{w}_{\text{пл}} = \Gamma^{-1} \mathbf{h}_1$ и $P \Gamma^{-1} \mathbf{h}_1 = \Gamma^{-1} \mathbf{h}_2$, из чего следует

Утверждение 1. Пусть в условиях $|\gamma(1) - \gamma(2)| > \Delta$ (различимости жидкости) выполнено: $\det[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2] \approx 0$, тогда $p_{\text{пл}}(1) \approx p'_{\text{пл}}(2) \approx p_{\text{пл}}$ (среднепластовые давления почти не различимы) и $p_{\text{пл}} \cong c_0 / c_4 \cong a_0 / a_4$.

Доказательство следует из представления $P \approx p_{\text{пл}} I$ и равенства $p_{\text{пл}} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$.

Согласно (11) и принятым обозначениям (13) можно записать

$$W \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h}_3, \quad W \mathbf{1} = \mathbf{h}_4. \tag{15}$$

Отсюда следует

Утверждение 2. Если для любых W , таких, что $|\det W| > \Delta$, выполнено $\det[\mathbf{h}_3 \quad \mathbf{h}_4] \approx 0$, то $\gamma(1) \approx \gamma(2) \approx \gamma(1)$ (удельные веса жидкостей почти не различимы) и $\gamma \cong a_3 / c_3 \cong a_4 / c_4$.

Доказательство следует из представления $\gamma \approx \gamma \mathbf{1}$ при подставке в (14) и равенства $\mathbf{h}_3 \approx \gamma \mathbf{h}_4$.

Условие обратимости матрицы W определяет факт различимости свойств притоков в виде

$$|w_{\text{пл}}(1)w_z(2) - w_{\text{пл}}(2)w_z(1)| > \Delta. \tag{16}$$

Утверждение 3. Пусть в условиях (16) выполнено: $|\det[\mathbf{h}_3 \quad \mathbf{h}_4]| > \Delta$, тогда удельные веса жидкостей горизонтов различимы ($|\gamma(1) - \gamma(2)| > \Delta$) и алгоритм однозначного решения системы уравнения (9) относительно параметров (3) задается следующей инструкцией.

Начало

- 1 $\boldsymbol{\gamma} = [a_1 / c_1 \quad a_2 / c_2]^T$ — вектор удельных весов добываемых флюидов
- 2 $\mathbf{w}_{\text{пл}} = \Gamma^{-1} \mathbf{h}_1$ — вектор коэффициентов продуктивности

- 3 $\mathbf{w}_z = \Gamma^{-1} \mathbf{h}_5$ — вектор гидропроводностей переходов «ПЗ-забой скважины»
- 4 $\mathbf{q}_{\text{пл}} = \Gamma^{-1} \mathbf{h}_2$ — вектор промежуточных данных расчета ($\mathbf{q}_{\text{пл}} = P \mathbf{w}_{\text{пл}}$)
- 5 $\mathbf{p}_{\text{пл}} = [q_{\text{пл}}(1)/w_{\text{пл}}(1) \quad q_{\text{пл}}(2)/w_{\text{пл}}(2)]^T$ — вектор давлений подпора зон внешнего окаймления

Конец

Доказательство утверждения в точности соответствует логике последовательных вычислений с использованием ранее введенных обозначений (13) и равенств (14). Неоднозначность решений, связанная с возможным обнулением параметров c_1, c_2, a_1, a_2 , упреждается условием (16).

Утверждение 4. Пусть в условиях утв. 3 выполнено: $|\det[\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2]| > \Delta$, что гарантирует различимость параметров ($|p_{\text{пл}}(1) - p'_{\text{пл}}(2)| > \Delta$) \wedge ($|\gamma(1) - \gamma(2)| > \Delta$), тогда итеративный алгоритм решения укороченной системы уравнений (11) вводится следующей инструкцией:

Начало

- 1 $\gamma(1) = [\gamma(1,1) \quad \gamma(2,1)]^T$
- 2 $j = 1$ — начало цикла
- 3 $\Gamma(j)^T = [\mathbf{1} \quad \gamma(j)]$
- 4 $\mathbf{w}_{\text{пл}} = \Gamma(j)^{-1} \mathbf{h}_1$
- 5 $\mathbf{q}_{\text{пл}} = \Gamma(j)^{-1} \mathbf{h}_2$
- 6 $\mathbf{p}_{\text{пл}}(j) = [q_{\text{пл}}(1)/w_{\text{пл}}(1) \quad q_{\text{пл}}(2)/w_{\text{пл}}(2)]^T$ — расчет вектора пластовых давлений j -го приближения
- 7 $P_{\text{пл}}(j)^T = [\mathbf{1} \quad \mathbf{p}_{\text{пл}}(j)]$ — формирование матрицы: $P_{\text{пл}}(j)^T$
- 8 $\mathbf{w}_{\text{пл}} = P_{\text{пл}}(j)^{-1} \mathbf{h}_6$
- 9 $\mathbf{q}_r = P_{\text{пл}}(j)^{-1} \mathbf{h}_7$ — вектор промежуточных данных расчета ($\mathbf{q}_r = \text{diag}\{\gamma(1) \quad \gamma(2)\} \mathbf{w}_{\text{пл}}$).
- 10 $\gamma(j+1) = [q_r(1)/w_{\text{пл}}(1) \quad q_r(2)/w_{\text{пл}}(2)]^T$
- 11 Если $\|\gamma(j+1) - \gamma(j)\| > \varepsilon$, то $\left. \begin{array}{l} \gamma(j+1) := \nu \cdot \gamma(j+1) + (1-\nu) \cdot \gamma(j) \\ j := j+1 \\ \text{на 3} \end{array} \right\}$
- иначе $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(j+1)^T = [\mathbf{1} \quad \gamma(j+1)] \\ \mathbf{w}_{\text{пл}} = \Gamma(j+1)^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{w}_z = \Gamma(j+1)^{-1} \mathbf{h}_3 \\ \text{ВЫВОД} \quad / \quad \mathbf{w}_{\text{пл}}, \mathbf{w}_z, \mathbf{p}_{\text{пл}} = \mathbf{p}_{\text{пл}}(j), \gamma = \gamma(j+1) / \end{array} \right.$

Конец

где $\nu \in (0, 1)$ — шаг поиска, ε — параметр точности расчета.

Доказательство утверждения следует приведенной логике вывода в соответствии с описанием уравнений (11). В компонентных обозначениях, начиная с четвертой позиции, имеем

$$\begin{aligned}
 &^4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma(1, j) & \gamma(2, j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\text{пл}}(1) \\ w_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 \\ a_4 \end{bmatrix}, \\
 &^5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma(1, j) & \gamma(2, j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\text{пл}}(1) \\ q_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} q_{\text{пл}}(1) \\ q_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{\text{пл}}(1)p_{\text{пл}}(1, j) \\ w_{\text{пл}}(2)p'_{\text{пл}}(2, j) \end{bmatrix} \\
 &^6 \mathbf{p}_{\text{пл}}(j) = [q_{\text{пл}}(1)/w_{\text{пл}}(1) \quad q_{\text{пл}}(2)/w_{\text{пл}}(2)]^T \\
 &^7 \mathbf{P}_{\text{пл}}(j)^T = [\mathbf{1} \quad \mathbf{p}_{\text{пл}}(j)] \\
 &^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_{\text{пл}}(1, j) & p'_{\text{пл}}(2, j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\text{пл}}(1) \\ w_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 \\ c_0 \end{bmatrix}, \\
 &^9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_{\text{пл}}(1, j) & p'_{\text{пл}}(2, j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{\text{г}}(1) \\ q_{\text{г}}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} q_{\text{г}}(1) \\ q_{\text{г}}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(1, j+1)w_{\text{пл}}(1) \\ \gamma(2, j+1)w_{\text{пл}}(2) \end{bmatrix} \\
 &^{10} \gamma(j+1) := \nu \cdot \gamma(j+1) + (1-\nu) \cdot \gamma(j) \\
 &^{11} \text{Условие останова и вывод результатов,}
 \end{aligned}$$

что подтверждает логику расчета и соответствует утверждению.

Результаты данного исследования в части работоспособности модели притока и вопросы идентифицируемости модели должны подтверждаться примерами моделирования и решения обратной задачи — определения параметров притока скважины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика // Гостоптехиздат, Ижевск.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 736 с.
2. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления [Текст] : учебное пособие / А.А. Первозванский. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 616 с.
3. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования. Изд. 4-е, перераб. и доп. / В.А. Бесекерский, Попов Е.П. СПб.: Профессия, 2003. 751 с.
4. Растринин Л.А. Современные принципы управления сложными объектами / Л.А. Растринин. М.: Сов. радио, 1980. 232 с.

Solovyev I.G., Vedernikova U.A., Gapanovich I.V.

Identification of influx parameters of an oil well draining two productive strata

The paper considers a linearized finite dimensional hydrodynamic model of influx in a vertical oil well draining two productive strata. Issues of hydrodynamic model identification and identifiability requirements are discussed.

Oil well, productive strata, hydrodynamic model, identification, identifiability.