

И.В. Бычин, А.В. Гореликов, А.В. Ряховский

ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛООБМЕНА И ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ¹

Рассматривается разработанное авторами программное обеспечение для численного моделирования теплообмена и течения жидкости в сферических слоях. Приводятся данные об ускорении расчетов при использовании вычислительных систем с параллельной архитектурой. Представлены результаты решения тестовых задач.

Численное моделирование, параллельное программирование, конвекция, сферический слой.

Численное моделирование теплообмена и течения жидкости в сферических слоях является одним из основных методов исследования процессов конвекции в жидких и газовых оболочках Земли, звезд и планет. В частности, вычислительный эксперимент широко используется при изучении мантийной конвекции и конвекции во внешнем жидком ядре Земли. Кроме изучения природных процессов численное моделирование конвекции в областях со сферической геометрией необходимо для решения ряда инженерно-технических задач тепломассообмена. Примером являются задачи конвекции в топливных баках и отсеках космических аппаратов сферической формы.

На кафедре прикладной математики Сургутского государственного университета разработан комплекс программ для численного моделирования течений вязкой несжимаемой теплопроводящей жидкости в сферических оболочках. В качестве математической модели используются уравнения Навье — Стокса, неразрывности и переноса тепла. Программный комплекс предназначен для решения двух- (в осесимметричной постановке) и трехмерных задач гидродинамики и теплообмена в сфере или сферическом слое. Программы позволяют использовать размерную или любую допустимую безразмерную формулировку решаемой задачи. В вычислительных программах реализован метод контрольного объема [1] в сферических координатах. Расчет поля течения можно проводить по двум алгоритмам: SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Revised) [1] или PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [2]. Как показывают результаты тестов [3], алгоритм PISO более эффективен при нестационарных задачах. Код программ написан на языке Fortran 90.

Численные решения задач гидродинамики и теплообмена зачастую требуют множество вычислительных ресурсов. Таким образом, возникает необходимость использования высокопроизводительных вычислительных систем с параллельной архитектурой. В разработанном программном комплексе реализованы два варианта распараллеливания программного кода: для систем с общей памятью (многопроцессорные или многоядерные компьютеры) по стандарту OpenMP и вычислительных систем с распределенной памятью (кластеры) с использованием интерфейса MPI. Вариант OpenMP программы на четырехядерном процессоре дает ускорение в 2,2 раза по сравнению со скоростью выполнения однопоточного кода. В варианте MPI программы ис-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 13-01-12051 офи_м.

пользуется метод одномерной декомпозиции с перекрытием смежных подобластей. Расчетная область разбивается на подобласти одинакового размера вдоль азимутального угла, в каждой из которых расчет ведется отдельным процессом. При такой декомпозиции каждый процесс обменивается данными только с процессами, отвечающими за соседние подобласти. Эффективность параллельного кода оценивается по ускорению S . Ускорение определяется как отношение времени выполнения кода на одном процессоре к времени выполнения на N процессорах. На рис. 1 приведен график зависимости ускорения от числа используемых процессоров. Результаты по ускорению получены при решении нестационарной задачи вынужденной конвекции в сферическом слое (тест 2 настоящей работы). В тестах на ускорение использовались расчетные сетки: $n_r = 120$, $n_\theta = 120$, $n_\phi = 120$ и $n_r = 60$, $n_\theta = 180$, $n_\phi = 360$, где n_r , n_θ , n_ϕ — количество узловых точек вдоль соответствующих координатных линий сферических координат (r, θ, ϕ) .

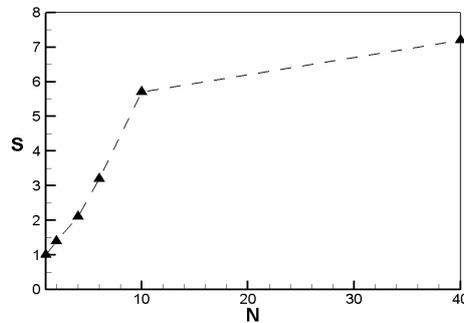


Рис. 1. Зависимость ускорения S параллельной MPI программы от числа процессоров N

Далее представлены результаты некоторых тестовых расчетов. В тестах 3, 4 проводится сравнение результатов с данными работ других авторов и поэтому сохранены оригинальные обозначения, принятые в этих работах.

Тест 1 (задача стационарного течения и теплообмена в сферическом слое G_L в осесимметричной постановке).

Безразмерные переменные: $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta\}$ — базис в сферических координатах (R, θ) ; $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta$ — скорость жидкости; \hat{S} — безразмерный тензор вязких напряжений, P — давление, T — температура.

$$G_L = \{(R, \theta) : 1 < R < 2; 0 \leq \theta \leq \pi\}:$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \text{div} \hat{S}, \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (3)$$

Граничные условия:

$$R = 1 : U = \cos \theta, V = -\sin \theta, T = \frac{e^2 - e^{\cos \theta}}{2sh2}, \quad (4)$$

$$R = 2: U = \cos \theta, V = -\sin \theta, T = \frac{e^2 - e^{2\cos \theta}}{2sh2}. \quad (5)$$

Аналитическое решение:

$$U_0 = \cos \theta, V_0 = -\sin \theta, P_0 = const; T_0 = \frac{e^2 - e^{R\cos \theta}}{2sh2}.$$

Точность численного решения оценивалась по максимальным в области G_L абсолютным и относительным ошибкам, которые определялись по формулам:

$$\Delta f = \max_{G_L} |f - f_0|, \delta f = \frac{\Delta f}{|f_0^*|} \cdot 100 \%. \quad (6)$$

Здесь: f — численное значение; f_0 — аналитическое решение; V_L — объем сферического слоя G_L ; $|f_0^*| = \frac{1}{V_L} \int_{G_L} |f_0| dv$ — среднее значение модуля f_0 .

Таблица 1

Результаты теста 1

$n_R \times n_\theta$	ΔU	$\delta U, \%$	ΔV	$\delta V, \%$	ΔT	$\delta T, \%$
12 × 32	$4,3949 \cdot 10^{-4}$	$8,7897 \cdot 10^{-2}$	$2,0212 \cdot 10^{-3}$	$2,5735 \cdot 10^{-1}$	$1,1921 \cdot 10^{-3}$	$1,4714 \cdot 10^{-1}$
22 × 62	$1,6454 \cdot 10^{-4}$	$3,2908 \cdot 10^{-2}$	$5,1711 \cdot 10^{-4}$	$6,5840 \cdot 10^{-2}$	$3,0853 \cdot 10^{-4}$	$3,8084 \cdot 10^{-2}$
42 × 122	$7,0334 \cdot 10^{-5}$	$1,4067 \cdot 10^{-2}$	$1,4147 \cdot 10^{-4}$	$1,8012 \cdot 10^{-2}$	$7,8400 \cdot 10^{-5}$	$9,6776 \cdot 10^{-3}$

Тест 2 (задача о нестационарном течении изотермической жидкости в сферическом слое G_L в трехмерной постановке).

Безразмерные переменные: $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ — базис в сферических координатах (R, θ, φ) ; τ — время; $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_\varphi$ — скорость жидкости.

$$G_L = \{(R, \theta, \varphi) : 0.5 < R < 1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi < 2\pi\}:$$

$$\frac{DU}{D\tau} = -\nabla P + \operatorname{div} \hat{S} + \cos \tau \mathbf{F}(R, \theta, \varphi), \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (8)$$

где $\mathbf{F}(R, \theta, \varphi) = 0,5 \cdot ([R \sin \theta \cos \varphi]^2 - 1)(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$.

Граничные условия:

$$\mathbf{U}|_{R=0.5} = \sin \tau \mathbf{F}|_{R=0.5}, \mathbf{U}|_{R=1} = \sin \tau \mathbf{F}|_{R=1}. \quad (9)$$

Начальные условия:

$$\mathbf{U}|_{\tau=0} = 0. \quad (10)$$

Аналитическое решение:

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}(R, \theta, \varphi) \sin \tau, P_0 = R \cos \theta \sin \tau + const.$$

Точность численного решения оценивалась по максимальным абсолютным и средним относительным ошибкам, которые определялись по формулам:

$$\Delta f = \max_{G_L} |f - f_0|; \delta f' = \frac{1}{V_L G_L} \int \left| \frac{f - f_0}{f_0} \right| dv \cdot 100\%. \quad (11)$$

В табл. 2 приведены максимальные значения ошибок для компонент скорости на временном отрезке [1, 3]; h — шаг по времени. Для азимутальной компоненты скорости W приведена только абсолютная ошибка, поскольку $W_0 \equiv 0$.

Таблица 2

$n_r \times n_\theta \times n_\varphi, h$	ΔU	$\delta U', \%$	ΔV	$\delta V', \%$	ΔW
$7 \times 16 \times 30; 10^{-3}$	$1,734 \cdot 10^{-3}$	0,3021	$5,191 \cdot 10^{-3}$	0,8735	$1,121 \cdot 10^{-3}$
$12 \times 32 \times 62; 5 \cdot 10^{-3}$	$4,015 \cdot 10^{-4}$	0,0655	$1,155 \cdot 10^{-3}$	0,1910	$2,798 \cdot 10^{-4}$
$22 \times 62 \times 122; 10^{-4}$	$1,272 \cdot 10^{-4}$	0,0164	$2,945 \cdot 10^{-4}$	0,0460	$7,384 \cdot 10^{-5}$

Тест 3 (задача о сферическом течении Куэтта [4]).

Сферическое течение Куэтта — это течение вязкой несжимаемой изотермической жидкости, возникающее в сферическом слое из-за разницы угловых скоростей вращения границ слоя. Далее представлены результаты расчетов стационарного осесимметричного режима течения для случая, когда вращается только внутренняя сфера с постоянной угловой скоростью ω_0 в азимутальном направлении. Решение задачи определяется двумя безразмерными параметрами: $Re = \frac{\omega_0 r_0 H}{\nu}$ — число Рейнольдса и $\delta = \frac{H}{r_0}$ — относительная толщина слоя, где H — толщина сферического слоя; r_0 — радиус внутренней сферы; ν — кинематическая вязкость.

Математическая модель в безразмерной форме ($\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_\varphi$):

$$G_L = \{(R, \theta) : 1 < R < 1 + \delta; 0 \leq \theta \leq \pi\};$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla P + \text{div} \hat{\mathbf{S}}, \quad (12)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0, \quad (13)$$

Граничные условия:

$$\mathbf{U}|_{R=1} = Re \frac{1}{\delta} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{U}|_{R=1+\delta} = 0. \quad (14)$$

Для численного решения использовался двумерный вариант программы для моделирования осесимметричных течений. Расчеты проводились на сетке $n_r = 102$, $n_\theta = 302$. Расчеты проводились для $\delta = 1,27$, значение числа Рейнольдса варьировалось в диапазоне от 10 до 550. Результаты расчетов сравнивались с данными работы G. Dumas [4], в которой для численного решения применялся спектральный метод.

Типичная для случая вращения внутренней границы сферического слоя структура меридионального течения представлена на рис. 2а ($Re = 550$). На этом рисунке показаны изолинии функции тока Ψ , которая для течения с осевой симметрией в сферических координатах определяется следующей системой уравнений:

$$U = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R}. \quad (16)$$

Значения функции тока вычислялись по формуле

$$\Psi(R, \theta) = -\sin \theta \int_1^R R V(R, \theta) dR. \quad (17)$$

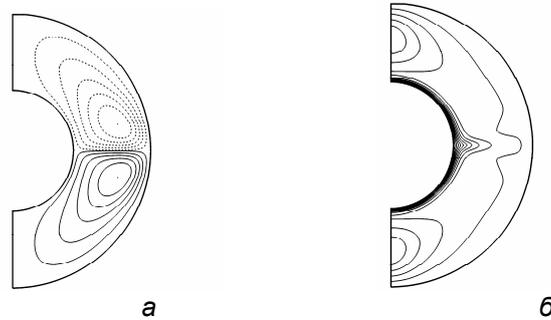


Рис. 2. Структура меридионального течения и распределение угловой скорости ($Re=550$): а — функция тока Ψ ($\max|\Psi| = 0,0517$, изолинии построены с шагом 0,0093, пунктир соответствует отрицательным значениям); б — угловая скорость Ω ($0 \leq \Omega \leq 1,27$, изолинии построены с шагом 0,116)

Течение для всех чисел Рейнольдса из рассмотренного диапазона симметрично относительно плоскости экватора. Циркуляция в меридиональной плоскости направлена от экватора к полюсам вдоль внешней сферы. На рис. 2б показано распределение угловой скорости вращения жидкости:

$$\Omega(R, \theta) = \frac{W}{R \sin \theta}. \quad (18)$$

Средняя по объему кинетическая энергия E и момент сил трения M на внутренней сфере ($R=1$) находились по формулам:

$$E = \frac{1}{V_L G_L} \int \frac{\mathbf{U}^2}{2} dV, \quad (19)$$

$$M = -2\pi \int_0^\pi \left[\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R} \right]_{R=1} \sin^2 \theta d\theta. \quad (20)$$

В табл. 3 представлены вычисленные значения E , M , $\max|\Psi|$ для стационарных осесимметричных режимов течения при различных значениях Re и для сравнения — данные из работы [4]. Для всех чисел Рейнольдса из рассмотренного диапазона результаты тестовых расчетов хорошо совпадают с результатами работы [4], как по структуре течения, так и по значениям рассчитываемых величин (E , M , $\max|\Psi|$).

Таблица 3

Re	E	E [4]	M	M [4]	$\max \Psi $	$\max \Psi $ [4]
95	0,0277	0,0275	25,83	25,59	0,0468	0,0467
245	0,0215	0,0213	37,16	36,94	0,0547	0,0544
550	0,0189	0,0187	51,21	50,63	0,0517	0,0512

Тест 4 (задача о естественной конвекции в центральном поле тяжести во вращающейся сферической оболочке [5]).

Следующий тест — одна из трех задач, рассмотренных в работе [5]. В [5] представлены результаты, полученные различными численными методами с

использованием разных вычислительных программ шестью группами исследователей из Германии, Франции, Великобритании, США и Японии. Результаты численных исследований хорошо согласуются между собой, что позволяет говорить о высокой степени их достоверности.

Задача рассматривается в следующей постановке. Вращающийся вокруг оси z с угловой скоростью $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$ сферический слой заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Отношение внутреннего радиуса сферического слоя r_i к внешнему радиусу r_0 равно 0,35. Температуры на границах фиксированы, ΔT — разность температур на внутренней и внешней границах слоя ($\Delta T > 0$). Используется приближение Буссинеска, причем сила тяжести направлена к центру слоя и линейно зависит от радиуса. В качестве характерного размера выбирается толщина слоя $D = r_0 - r_i$, что делает безразмерные радиусы равными $r_0 = 20/13$ и $r_i = 7/13$. Характерные масштабы: времени D^2/ν , где ν — кинематическая вязкость; скорости ν/D ; температуры ΔT ; давления $\rho \nu \Omega$. Безразмерная температура внешней границы равна нулю. Система уравнений естественной конвекции в равномерно вращающейся системе отсчета в безразмерной форме:

$$E \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right) + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nabla P = Ra \frac{\mathbf{r}}{r_0} T, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (23)$$

Граничные условия:

$$r = r_i: \mathbf{u} = 0; T = 1; \quad (24)$$

$$r = r_0: \mathbf{u} = 0; T = 0. \quad (25)$$

Начальная скорость равна нулю, а начальная температура:

$$T = \frac{r_0 r_i}{r} - r_i + \frac{210 A}{\sqrt{17920\pi}} (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) \sin^4 \theta \cos 4\phi; \quad (26)$$

где θ — широта, ϕ — долгота и $x = 2r - r_i - r_0$.

Безразмерные параметры:

$$Ra = \frac{\alpha g_0 \Delta T D}{\nu \Omega} \text{ — модифицированное число Релея, где } \alpha \text{ — коэффициент}$$

теплового расширения; g_0 — ускорение свободного падения на внешнем ра-

диусе; $E = \frac{\nu}{\Omega D^2}$ — число Экмана; $Pr = \frac{\nu}{k}$ — число Прандтля, где k — коэф-

фициент теплопроводности.

Значения безразмерных параметров тестовой задачи: $Ra=100$, $E=10^{-3}$, $Pr=1$. Квазистационарное решение (рис. 3) достигается примерно за 1,2 ед. безразмерного времени. Решение симметрично относительно экватора ($\theta = \pi/2$) и обладает четырехлучевой симметрией по азимутальному направлению. Решение устойчиво к возмущениям, несимметричным относительно плоскости экватора [5]. Конвективная структура решения, не меняя размеров и формы, равномерно вращается вокруг оси z . Зависимость от времени в таком квазистационарном реше-

нии может быть представлена в виде: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, \varphi - \omega t)$, $T = T(r, \theta, \varphi - \omega t)$, где ω — частота дрейфа в азимутальном направлении.

В работе представлены результаты 14 численных экспериментов по решению данной задачи. Численное моделирование проводилось с использованием различных вариантов комбинаций спектральных методов (разложение по сферическим гармоникам) с методами конечных разностей. Приводятся значения частоты дрейфа ω и средняя плотность кинетической энергии жидкости, которая рассчитывалась по формуле

$$E_{kin} = \frac{1}{2V_L} \int_{V_L} \mathbf{u}^2 dV, \quad (27)$$

где V_L — объем жидкой оболочки.

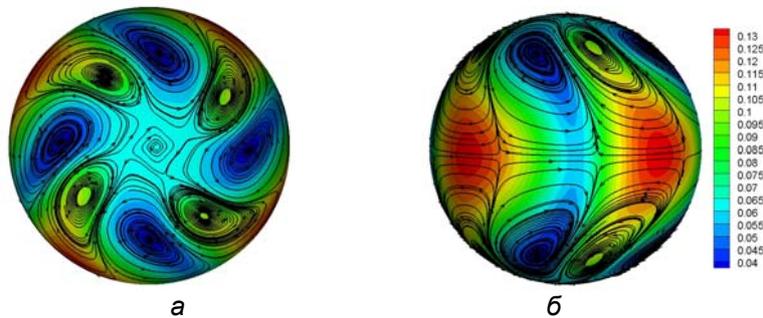


Рис. 3. Распределение температуры и линии тока тангенциальных составляющих скорости на сферической поверхности ($R = 1,3693$)

Кроме того, вычислялись локальные характеристики T и u_φ в точке с координатами (r, θ, φ) : $r = (r_o + r_i)/2$; $\theta = \pi/2$ – экваториальная плоскость; φ — координата определяется условиями: $u_r = 0$ и $(\partial u_r / \partial \varphi) > 0$. В табл. 4 представлены значения E_{kin} , T , u_φ , ω , полученные в данной работе на сетке $n_r = 122$, $n_\theta = 162$, $n_\varphi = 192$, и значения, предложенные в [5], как стандартные для рассматриваемой задачи.

Таблица 4

	E_{kin}	T	u_φ	ω
Результаты теста 4	58,419	0,4282	-10,099	0,2205
Результаты [5]	$58,348 \pm 0,050$	$0,42812 \pm 0,00012$	$-10,1571 \pm 0,0020$	$0,1824 \pm 0,0050$

В работе представлены результаты численного решения четырех тестовых задач различного уровня сложности. Результаты проведенных тестовых расчетов достаточно хорошо совпадают как с аналитическими решениями, так и с результатами других авторов. Программный комплекс демонстрирует хорошую производительность при использовании вычислительных систем с параллельной архитектурой. Таким образом, разработанный комплекс программ можно применять для численного решения сложных задач гидродинамики и теплообмена в сферических слоях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
2. Issa R. I. Solution on the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // Journ. of Computational Physics. 1985. 61. P. 40–65.
3. Issa R. I., Gosman A. D. and Watkins A. P. The Computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme // Journ. of Computational Physics. 1986. 62. P. 66–82.
4. Dumas G. Study of spherical couette flow via 3-d spectral simulations: Large and narrow gap flows and their transitions: Ph.D. thesis / California Inst. of Technology Pasadena. 1991.
5. Christensen U. R. et al. A numerical dynamo benchmark // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2001. 128. 25–34.

Bychin I.V., Gorelikov A.V., Ryakhovsky A.V.

The testing of software package for numerical simulation of heat exchange and fluid flow in spherical layers

Subject to consideration being software developed by the authors for numerical simulation of heat exchange and fluid flow in spherical layers. The paper cites data on speeding up computations using systems with parallel architecture, presenting solution results on the testing problems.

Numerical simulation, parallel programming, convection, spherical layer.