Г.П. Быстрай, И.А. Лыков, С.А. Охотников

ВИХРЕОБРАЗОВАНИЕ В АТМОСФЕРЕ ПРИ ПОВЫШЕННОЙ ВЛАЖНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СТОКАМИ И ИСТОЧНИКАМИ

При математическом моделировании сильнонеравновесных и нелинейных процессов переноса импульса в атмосфере с большими градиентами влажности по высоте предлагается оригинальный подход на основе уравнений переноса импульса с нелинейной функцией источников и стоков. Нелинейная функция источников и стоков вводится на основе данного термодинамического подхода и приводит к режиму с обострением. Развитие данного гидродинамического режима, порождаемого самой нелинейной средой, ведет к самоорганизации, которая выявлена и описана при помощи численного расчета термодинамических характеристик. На основе конкуренции процессов приращения и распространения импульса показано появление новой характеристики среды — пространственного диаметра возникающей самоорганизованной структуры.

Турбулентное течение, математическое моделирование, термодинамический подход, нелинейное уравнение, неравновесный процесс, нелинейные стоки и источники, режим с обострением, самоорганизация, вихреобразование.

Введение

В умеренно-континентальных широтах, где встречаются холодные и теплые воздушные потоки и большие по высоте градиенты влажности, возникают условия, благоприятные для образования сильных атмосферных вихревых течений (смерчей, торнадо, циклонов).

Результаты численного моделирования режимов развитой турбулентности приводится в работе [1]. Моделирование возникновения атмосферных вихрей с учетом многих приближений проводилось в работах [3, 7, 8, 13]. Тем не менее причины их образования не изучены полностью до сих пор, так как отсутствуют какие-либо полные математические модели турбулентных режимов, которые бы включали термодинамику неравновесных тепловых процессов и объясняли возникновение вихревого ядра. Можно указать лишь некоторые общие сведения, наиболее характерные для типичных смерчей. Требуется понять и описать эти новые механизмы накопления и трансформации колоссальной энергии в атмосфере, чтобы в будущем использовать их на службе человека в некоторых технических устройствах.

Смерчи как особый вид мощных атмосферных вихрей в своем развитии, за которое отвечает режим с обострением, впервые обнаруженный и описанный в работах [2, 4], проходят несколько основных стадий. Теоретическое описание скорости движения воздуха в турбулентной воронке, да и в целом всей физики турбулентных процессов, и в частности термодинамики сильнонеравновесных процессов, до сих пор представляет серьезную проблему. Именно эта проблема и решалась в рамках данной работы.

Подход, используемый авторами, позволяет получить новые физически непротиворечивые уравнения для описания эффектов на основе уравнений переноса импульса с модельной функцией источников и стоков, что относит этот подход к задачам с обострением и является развитием идей отечественного ученого А.А. Самарского и его школы [2, 4, 10–12]. Если следовать этим работам, то можно утверждать, что конкуренция процессов приращения за счет нелинейного источника и распространения импульса с учетом вязкости среды должна приводить к появлению некоторого линейного размера (пространственного диаметра смерча ℓ_0), на котором эти процессы «уравновешивают» друг друга [4, 11].

В данной работе описаны пространственные и скоростные характеристики вихрей различных мощностей в атмосфере с большими градиентами влажности по высоте, составляющие скорости движения в вихревом ядре и его окрестности, возникновение спиральных волн, поднимающихся по высоте рукава, возникновение пространственного «хобота» (тромба) и мезовихрей за его пределами.

Гидротермодинамическая модель

Рассмотрим тонкий слой воздуха единичного объема, параллельный поверхности Земли, в котором имеются источники движения и его стоки, зависящие от горизонтальной скорости. Предположим, что температура слоя постоянна: $T_0 \cong \mathrm{const}$. Для построения физической модели используем следующие гипотезы.

1. Закон сохранения энергии для слоя единичного объема. Пусть $F(\theta(\xi_e,\xi_i), V, t)$ — свободная энергия Гельмгольца для неравновесного слоя воздуха единичного объема $V = 1$, которая является функцией состояния системы, принимающая в состоянии равновесия минимальное значение F_0; θ — значение температуры в неравновесном состоянии, ξ_i — внутренняя, ξ_e — внешняя переменные (параметры неравновесия). Тогда для $F(\theta(\xi_e, \xi_i), V, t)$ полная производная ее по времени равна:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi_e}\frac{d\xi_e}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\left(\frac{\vec{\partial \theta}}{\partial \xi_i}\right)\frac{d\vec{\xi_i}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1}$$

Руководствуясь физическим смыслом, введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -S, \quad \frac{\partial F}{\partial V} = -P; \quad \vec{J_i} = -\frac{d\vec{\xi_i}}{dt}, \quad J_e = -\frac{d\xi_e}{dt}, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_e} \equiv -S\frac{\partial \theta}{\partial \xi_e}, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \equiv -S\frac{\partial \theta}{\partial \xi_i};$$

$$\vec{X_i} = -\frac{S}{\theta}\left(\frac{\vec{\partial \theta}}{\partial \xi_i}\right) = -\frac{1}{T}\nabla\vec{\vartheta}, \quad X_e = \frac{S}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \xi_e}; \quad \sigma = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Здесь S — неравновесное значение энтропии, P — давление для тонкого плоского слоя воздуха, определяющие наравне с другими параметрами неравновесное состояние; $\theta\sigma$ = const — неформализуемые потери энергии, которые всегда есть в открытых системах. Внутренние переменные для задачи переноса импульса имеют вид $\xi_i = \hat{\eta}\hat{\varepsilon}$ — векторная величина, $\hat{\varepsilon}$ — тензор деформации, J_e и J_i — внешние и внутренние термодинамические потоки, X_e и X_i — внешние и внутренние термодинамические силы.

Тогда для конечного локального воздушного слоя равенство (1) можно записать:

$$\frac{dF}{dt} = -S\frac{\partial \theta}{\partial t} - P\frac{dV}{dt} + \theta J_e X_e - \theta \vec{J_i}\,\vec{X_i} - \theta\sigma. \tag{2}$$

Это математическое выражение принципа локального неравновесия в условиях неформализуемых энергетических потерь применимо как для линейных, так и для нелинейных процессов и выражает в локальном виде закон изменения энергии.

Будем исходить из полученного уравнения (2), которое представим при постоянном объеме (V = const) и полном отсутствии энергетических потерь $(\sigma \equiv 0)$ в скалярном виде при $T = T_0$ для свободной энергии, определенной для неравновесных состояний

$$\frac{d(F - F_0)}{dt} = -T_0\left(\sigma_e + \vec{J}_i \vec{X}_i\right), \tag{3}$$

где

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_V \frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial t}.$$

В уравнении (3) $T_0 \sigma_e \gtrless 0$ — функция источников и стоков ([σ_e] = Дж/К·с·м^3), $\vec{J}_i \vec{X}_i$ — скалярное произведение термодинамических потоков и сил (производство энтропии), $T_0 \equiv T_h$ — некоторая средняя однородная температура рассматриваемого слоя, зависящая от высоты, но не зависящая от координат *x, y*; $\vec{\vartheta}$ — локальное значение скорости сплошной среды в выбранном слое [ϑ] = м/с, [η] = Па·с, [F] = Дж/м^3. Выражение, стоящее в скобках уравнения (3), характеризует скорость изменения энтропии для объема слоя по И.Р. Пригожину [6]:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt} \equiv \sigma_e + \sigma_i, \quad \sigma_i = \vec{J}_i \vec{X}_i.$$

Справедливость уравнения (3) в данной задаче связана с тем, что внутренняя энергия для данного объема предполагается фиксированной: $F = U - T_0 S\big|_{U=\text{const}}$. Уравнение (3) отражает тот факт, что при самоорганизации — образовании диссипативных структур — имеет место уменьшение энтропии и происходит увеличение свободной энергии в слое, а при их разрушении — увеличение энтропии, свободная энергия при этом уменьшается.

2. Термодинамические потоки и силы. Для рассматриваемого двумерного случая вектор горизонтальной скорости имеет две компоненты: $\vec{\vartheta} = \{\vartheta_x, \vartheta_y\}$, где $\vartheta_x(x, y, t)$, $\vartheta_y(x, y, t)$. Введем вязкость в виде тензора второго ранга

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix},$$

где η_1 — собственная кинематическая вязкость, η_2 — вязкость, связанная с симметричным взаимодействием компонент скорости ϑ_x, ϑ_y через перекрестные коэффициенты. Порождаемый в слое неравновесный гидродинамический процесс характеризуется термодинамической силой (градиентом) $\vec{X}_i$ ([X_i] = 1/с·К) и потоком $\vec{J}_i$ ([J_i] = Н/м^2), которые являются векторами и могут быть представлены в виде: $\vec{X}_i = -\vec{\nabla}\vartheta / T_0$, $\vec{J}_i = L_{ik} \vec{X}_k = -\hat{\eta} \vec{\nabla} \vartheta$. Здесь $L_{ik} = \hat{\eta} T_0$ — коэффициент Онзагера ([L_{ik}] = Па·с·К), связанный с тензором вязкости. Тогда термодинамические потоки и силы в линейном приближении задаются в виде:

$$J_x = -\eta_1 \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, J_y = -\eta_2 \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} - \eta_1 \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}, X_x = -\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}\right), X_y = -\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}\right),$$

характеризующем обратные связи между ними — взаимодействие (взаимовлияние) потоков переноса потоковых компонент J_x, J_y.

3. Совместимость с уравнениями Навье — Стокса. После дифференцирования по времени (1), а также учета принципа вариации по потоку импульса [9] получаем гиперболическое уравнение

$$\rho \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} + \rho \vec{\vartheta}\frac{d^2\vec{\vartheta}}{dt^2} = \hat{\eta}\nabla\vec{\vartheta}\cdot\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} + T_0\frac{d\sigma_e}{dt}, \tag{4}$$

которое при выполнении принципа пространственной локальности дает предельное параболическое уравнение переноса импульса в форме Эйлера

$$\frac{\partial\vec{\vartheta}}{\partial t} = \hat{\nu}\Delta\vec{\vartheta} + \frac{T_0}{\rho}\left(\frac{\partial\vec{\sigma}_e}{\partial\vartheta}\right). \tag{5}$$

Уравнение (5) будет совместимо с уравнениями Навье — Стокса в векторной форме для несжимаемой жидкости ($div\vartheta = 0$) при выполнении следующего равенства для функции источников движения σ_e в виде векторного уравнения

$$\frac{T_0}{\rho}\left(\frac{\partial\vec{\sigma}_e}{\partial\vartheta}\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f} - \left(\vec{\vartheta}\vec{\nabla}\right)\vec{\vartheta}, \tag{6}$$

где *p* — давление, $\vec{f}$ — объемные силы ([f] = м/с). В этих выражениях $\hat{\nu} = \hat{\eta}/\rho$ — тензор кинематической вязкости ([ν] = м^2/с). Характеристики модели, такие как кинематическая вязкость, плотность воздуха и давление, являются функциями высоты *h*.

4. Производство энтропии. Выражение для производства энтропии $\sigma_i(h) = J_x X_x + J_y X_y$ рассматриваемого бесконечно тонкого слоя {*x*, *y*} примет вид

$$\sigma_i(h) = \frac{\eta_1(h)}{T_0}\left(\left(\frac{\partial\vartheta_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_x}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\eta_2(h)}{T_0}\left(\left(\frac{\partial\vartheta_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta_y}{\partial y}\right)^2\right) - \frac{\eta_1(h)+\eta_2(h)}{T_0}\left(\frac{\partial\vartheta_x}{\partial x}\frac{\partial\vartheta_y}{\partial x} - \frac{\partial\vartheta_x}{\partial y}\frac{\partial\vartheta_y}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Производство энтропии ([σ_i] = Дж/К·с·м^3) является знакоположительной функцией (функцией Ляпунова), так как $\sigma_i \geq 0$, $\dot{\sigma}_i \leq 0$. Условию положительности квадратичной формы (7) отвечает неравенство, налагаемое на коэффициенты вязкости: $\eta_1^2 \geq \eta_2^2$ [9].

5. Гипотеза о наличии в слое источников и стоков движения как постановка задачи с обострением. В такой постановке возможно образование локализованных в пространстве структур, в которых переменная может неограниченно (или ограниченно) возрастать. Следуя идеям А. Самарского в задачах с обострением, второе слагаемое в (5) представим в виде суммы линейных источников и нелинейных стоков:

$$\frac{T_0}{\rho(h)}\left(\frac{\partial \vec{\sigma_e}(h)}{\partial \vartheta}\right) = q\,\vec{\vartheta} - \hat{\alpha}|\vartheta|^2\,\vec{\vartheta}\,,\ \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В данном выражении q — константа, характеризующая интенсивность источников ([q] = 1/с), $\hat{\alpha}$ — тензор, описывающий нелинейные стоки ([α_i] = с/м^2). Тензорный характер коэффициента при нелинейном стоке связан с взаимодействием двух горизонтальных компонент скорости. Введем нормировочные параметры в полученную модель: $x^* = x/\ell_0$, $y^* = y/\ell_0$, $t \equiv t/t_0, \vartheta^* = \vartheta/\vartheta_c$, где ℓ_0, t_0, ϑ_c — нормировочные параметры (масштабы) координат, времени и скорости соответственно:

$$\nu_1^*(h) = \frac{\nu_1(h)t_0}{\ell_0^2},\ \nu_2^*(h) = \frac{\nu_2(h)t_0}{\ell_0^2},\ \sigma_e^*(h^*) = \sigma_e(h)\frac{T_0 t_0}{\rho_c \vartheta_c^2},\ \rho^*(h^*) = \frac{\rho(h)}{\rho_c},\ h^* = \frac{h}{h_0} = \frac{\mu g h}{RT_0},$$

$$q^* = q t_0,\ \hat{\alpha}^* = \hat{\alpha} t_0 \vartheta_c^2 .$$

Из выражений (6) и (8) следует, что градиент давления связан с функцией источников. Можно показать, что в этом случае при ненулевых q^* и $\hat{\alpha}^*$ воздушное течение является непотенциальным. При отсутствии источников и стоков течение становится потенциальным и удовлетворяет закону Бернулли. Функция внешних источников сводится к безразмерному виду согласно введенным обозначениям

$$\sigma_e^*(h^*) = \frac{q^*\rho^*(h^*)}{2}\vartheta^{*2} - \frac{\alpha_1^*\rho^*(h^*)}{4}\vartheta^{*4} - \frac{\alpha_2^*\rho^*(h^*)}{3}\vartheta_x^*\vartheta_y^*\vartheta^{*2}\,. \quad (9)$$

6. Двумерные уравнения движения в плоском слое. Уравнение Курамото — Цузуки для плоского слоя торнадо. Использованный подход позволяет рассмотреть более общий случай, включающий взаимовлияние компонент вектора скорости через коэффициент вязкости и функцию стоков в каждом слое. При данном подходе взаимозависимая система уравнений для проекций скорости для несжимаемой жидкости может быть записана в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta_x^*}{\partial t} = \nu_1^*(h^*)\left(\dfrac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial y^{*2}}\right) - \nu_2^*(h^*)\left(\dfrac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial y^{*2}}\right) + q^*\vartheta_x^* - \left(\alpha_1^*|\vartheta^*|^2\vartheta_x^* - \alpha_2^*|\vartheta^*|^2\vartheta_y^*\right) \\ \dfrac{\partial \vartheta_y^*}{\partial t} = \nu_1^*(h^*)\left(\dfrac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 \vartheta_y^*}{\partial y^{*2}}\right) + \nu_2^*(h^*)\left(\dfrac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 \vartheta_x^*}{\partial y^{*2}}\right) + q^*\vartheta_y^* - \left(\alpha_1^*|\vartheta^*|^2\vartheta_y^* + \alpha_2^*|\vartheta^*|^2\vartheta_x^*\right) \end{cases}. \quad (10)$$

7. Решение задачи о торнадо в рамках задач с обострением. Второе уравнение в системе уравнений (9) умножим на i и сложим левые и правые части первого и второго уравнения. В результате получаем уравнение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu_1^*(1 + ic_1)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^{*2}}\right) + q^*\Phi - \alpha_1^*(1 + ic_2)|\Phi|^2\Phi\,, \quad (11)$$

где $\Phi = \vartheta_x^* + i\vartheta_y^*$ — комплексная функция скорости; константа $c_1 = \nu_2^* / \nu_1^*$ связана с вязкостью, а $c_2 = \alpha_2^* / \alpha_1^*$ — со стоками в функции внешних источников. Уравнение (11) является комплексным параболического типа и известно как уравнение Курамото — Цузуки [5]. Это уравнение описывает режимы с обострением. Они характеризуются возникновением пространственно-локализованных стационарных структур, устойчивых при неизменных внешних воздействиях. Режимы с обострением дают приближенное описание (асимптотику) многих нелинейных систем с сильной положительной обратной связью. Они типичны для задач теории горения и взрыва, некоторых неустойчивостей в физике плазмы, ряда процессов, изучаемых математической биофизикой, гидродинамикой, химической кинетикой [11].

В двумерном случае уравнение (11), в том числе имеет решения, описывающие так называемые спиральные волны [5], если $R(x^*, y^*) = R(r)$ и $a(x^*, y^*) = S(r) + m\varphi$, где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — представляет собой величину топологического заряда. Случай $|m| > 1$ описывает многовитковую спиральную волну. Величина топологического заряда определяет количество вращающихся «отрезков» спиральных волн. Значение $m > 0$ соответствует правой закрутке волны, $m < 0$ — левой.

8. Условия самоорганизации. Для рассматриваемой нелинейной системы можно записать два следующих основных термодинамических критерия самоорганизации: 1) $\sigma_e^* < 0$, 2) $\left|\sigma_e^*\right| \geq \sigma_i^*$, где $\sigma_i^* = \sigma_i \dfrac{T_0 t_0}{\rho_c \vartheta_c^2}$. Это соответствует уменьшению энтропии в слое: $dS^* / dt < 0$, что говорит о росте упорядоченности и возникновении диссипативных структур в виде системы вихрей. Если перейти к модулю скорости, то условием самоорганизации выступят неравенства, полученные из (9):

$$\vartheta^{*2} \geq \frac{4q^*}{\alpha_1^*(1 - 4c_2^2/9)}, \quad c_2^2 = \frac{\alpha_2^{*2}}{\alpha_1^{*2}} < \frac{9}{4}. \tag{12}$$

Это и есть необходимые для возникновения самоорганизации условия на параметры уравнения Курамото — Цузуки и условие на модуль горизонтальной скорости в слое. Имеется в виду основное условие самоорганизации — уменьшение энтропии в рассматриваемом объеме. При $q^* = 1$, $\alpha^*_1 = 10$, $\alpha^*_2 = 1$ — $c_2^2 = \alpha_2^{*2} / \alpha_1^{*2} = 0.01$, $\vartheta_{\min}^* \geq 0.64$.

Есть еще одно условие, ограничивающее рост в размере поперечного размера вихревых атмосферных структур,— нулевой скорости изменения энтропии на границе, не дающее разрастаться поперечному размеру возникающей структуры до бесконечности. На этой границе конкуренция между упорядочением и развалом структур приводит к их выравниванию, что в конечном счете определяет существование ограниченного размера большого вихря, за пределами которого самоорганизация уже не наблюдается.

Краевая задача

Уравнение (11) совместно с начальными и граничными условиями представляет краевую задачу для горизонтального воздушного слоя. В задачу входит отыскание решений уравнения (компонент проекций скоростей на плоскость *xy* $\vartheta_x^*(x^*, y^*, t)$, $\vartheta_y^*(x^*, y^*, t)$) и определение всех функций, зависящих от них: модуля скорости воздушного течения, давления, градиента давления, производства энтропии, обратимых потоков энтропии, полной скорости изменения энтропии.

Параметры задачи. Кинематическая вязкость согласно модели считалась зависящей от высоты: $v^*_1 = v^*_2 = v^*(h)$. Параметры функций источников и стоков: $q^* = 1$, $\alpha^*_1 = 10$, $\alpha^*_2 = 1$, $c_2 = 0.1$. Относительные величины плотности ρ^* и давления p^* в зависимости от высоты h анализируемого слоя были взяты из справочников.

Размер области был определен, как $\ell_0 \times \ell_0$ (500×500 расчетных точек), $x^* \in [0,1]$, $y^* \in [0,1]$. Переход к реальным пространственным координатам возможен согласно выражениям: $y = \ell_0 y^s / 500$, $x = \ell_0 x^s / 500$, где x^s, y^s — координаты пространственной сетки. Временной шаг составлял величину $\Delta_t = 2.5 \cdot 10^{-7}$, момент времени фиксации выхода на стационарный режим — $t = 2 \cdot 10^{-4} t_0$.

Начальные условия. Будем исходить из гипотезы, что при опускании холодного влажного воздуха при встрече с поднимающимся сухим воздухом происходит закрутка воздушных масс. Через некоторое время наступает стационарный режим. Пусть вблизи поверхности земли скорость была ϑ_c, тогда $\vartheta^*_x = \vartheta_x / \vartheta_c$, $\vartheta^*_y = \vartheta_y / \vartheta_c$. Поэтому начальные условия для функции $\Phi(x^*, y^*, t^*)$:

$$\Phi(x^*, y^*, 0) = \Phi_0 \exp\left(i \cdot \left(R_0 \sqrt{\left(x^* - x^*_c\right)^2 + \left(y^* - y^*_c\right)^2} + m\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

где $\varphi = arctg\left(\dfrac{y^*}{x^*}\right)$; здесь Φ_0 — амплитуда скорости, R_0 — модуль волнового вектора вдоль радиус-вектора, зависящий от влажности, m — топологический заряд, $x^* = x / \ell_0$, $y^* = y / \ell_0$, $x^*_c = x_c / \ell_0$, $y^*_c = y_c / \ell_0$. Центр области $x^*_c = 0.5$, $y^*_c = 0.5$. $\Phi_0 = 10$, $R_0 = 60$. Исследовалось влияние влажности $W(h)$ на модуль R_0: $R_0 = f(W(h))$.

Граничные условия задавались в следующем виде:

$$\Phi(0, y^*, t^*) = 0, \quad \Phi(1, y^*, t^*) = 0, \quad \dot{\Phi}(0, y^*, t^*) = 0, \quad \dot{\Phi}(1, y^*, t^*) = 0$$
$$\Phi(x^*, 0, t^*) = 0, \quad \Phi(x^*, 1, t^*) = 0, \quad \dot{\Phi}(x^*, 0, t^*) = 0, \quad \dot{\Phi}(x^*, 1, t^*) = 0.$$

Результаты численного моделирования

Модуль скорости. Образование ядра. При проведении численного моделирования в стационарном режиме (при $m = \pm 1$) зафиксировано необычное поведение скорости воздушного течения вблизи центра расчетной области (рис. 1). Можно считать, что возникновение в плоском вихревом атмосферном слое такого стационарного ядра — локализованной в пространстве фигуры — является результатом обострения при стремлении решения уравнения (11) к автомодельному решению спиральной волны. Такое поведение характерно для смерчей и торнадо и приводит к формированию протяженного по высоте ядра (хобота), диаметр которого может быть также определен по результатам численного моделирования.

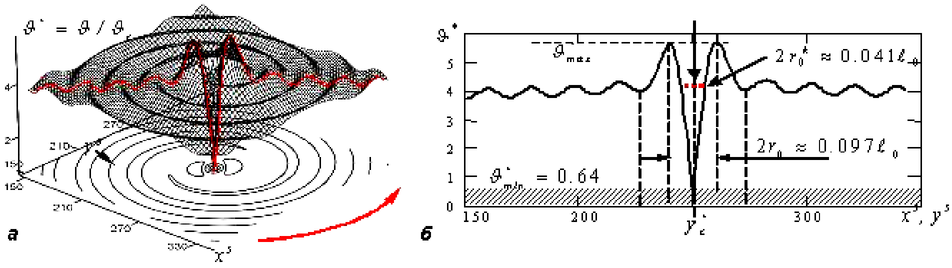

Рис. 1. Модуль горизонтальной скорости ϑ^* для непотенциального воздушного турбулентного течения в стационарном режиме вблизи земли $h \approx 0$ м около центра области (*а*) и его диагональное сечение (*б*) для $R_0 = 60$, $m = 1$. В центре ядра отсутствует горизонтальное движение воздуха, модуль скорости течения растет при приближении к радиусу ядра. Максимальная скорость $\vartheta^*_{\max}$ наблюдается по радиусу ядра в области двух мезовихрей, определяющих это ядро

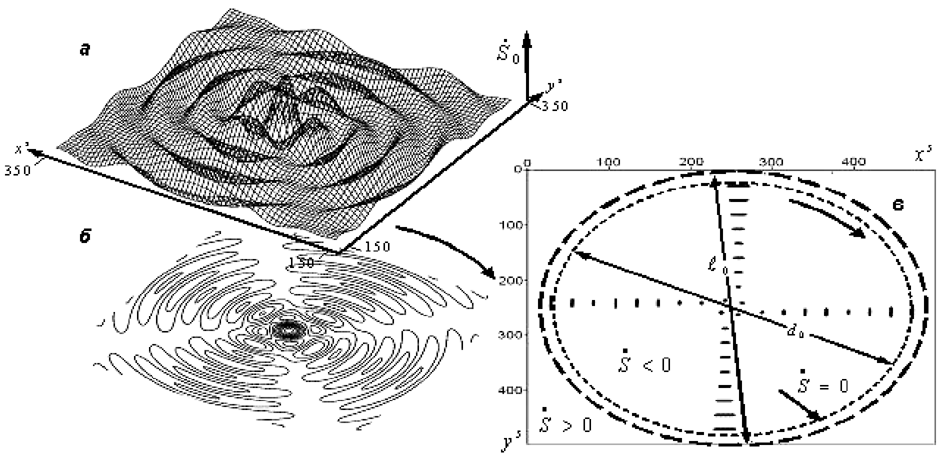

Рис. 2. Полная скорость изменения энтропии в поперечном слое на высоте $h = 1$ км в стационарном режиме воздушного турбулентного течения как функция пространственных координат x^s, y^s (*а*), его проекция в виде изолиний (*б*) (вид сверху) и области самоорганизации $dS/dt < 0$, выделенные черным цветом (*в*). Параметры: $\rho = 1.087$ кг/м^3, $\nu = 1.589 \cdot 10^{-5}$м^2/с, $\rho^* = 0.887$, $\nu_1^* = 1.182$, $\nu_2^* = 1.182$. $\dot{S}_0 = 4 \cdot 10^4$, $y_0^s = 200$. Наивысшие отрицательные значения $\dot{S}$ фиксируются в области ядра (*в*). За пределами области диаметром d_0 энтропия растет ($dS/dt > 0$) и вихреобразования не возникает

На рис. 2 представлено поведение скорости изменения энтропии dS^*/dt^* в плоскости воздушного слоя на высоте 1000 м. Зоны самоорганизации, там где $dS/dt < 0$, наблюдаются в основном вихревом бассейне (рис. 2, *в*). Из рисунка видно, что существует граница области диаметром d_0, на которой термодинамические условия самоорганизации перестают выполняться, что приводит к развалу всех вихрей, образующихся за пределами бассейна. Внутри бассейна имеет место образование диссипативных структур в виде спиральных волн и вихревого ядра (четыре черные точки в центре на рис. 2, *в*). В вихревом ядре скорость изменения энтропии принимает наивысшие отрицательные значения, что подтверждает образование самых устойчивых и сильных вихрей именно вблизи вихревого ядра. Последнее соответствует некоторым типам реально наблюдаемых атмосферных вихрей (смерчи, торнадо). Предложенный термодинамический подход, таким образом, подтверждает результаты моделирования кинетических эффектов и некоторые наблюдаемые факты.

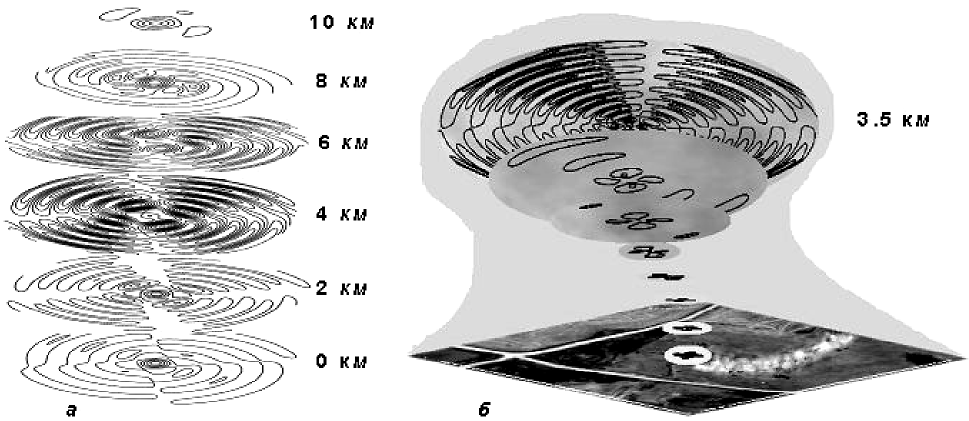

Рис. 3. Производство энтропии по слоям для различных высот как результат гидротермодинамического пространственного моделирования стационарного режима воздушного турбулентного течения при неизменном значении $R_0 = 60$, соответствующем повышенной влажности, для высот 0–10 км через 2 км (*а*) и для высот 0–3.5 км через 500 м при значениях $R_0 = 10, 10, 12, 13.5, 15, 17, 20, 40$ соответственно (*б*). В областях с повышенной влажностью хорошо видны возникающие диссипативные структуры (упорядоченные вихри) (*а, б*) и прекращение вихреобразования на малых высотах при уменьшении влажности на небольших высотах (*б*). В последнем случае видна только воронка вихря

С увеличением высоты за счет увеличения кинематической вязкости интенсивность вихреобразования падает (рис. 3, *а*), и должна существовать некоторая верхняя точка, выше которой самоорганизация не наблюдается. Это дает основание предполагать, что именно рост диссипации энергии приводит к развалу атмосферных вихрей. Энергия вихрей уменьшается по мере их развития за счет диссипации свободной энергии, и когда она иссякает — вихревая структура исчезает.

Образование ядра в зависимости от числа вихрей. При варьировании модуля топологического заряда от $|m| = 1$ до $|m| = 5$, отвечающего за число крупных вихрей, обнаружено, что образование вихревого ядра с повышенной скоростью вращения происходит только при малом числе вихрей ($1 \leq |m| \leq 2$). При увеличении числа вихрей ($|m| > 2$) в центральной части обнаруживается быстрое затухание вращения без образования одного или нескольких ядер в этой области. Это свидетельствует об устойчивости вихревых структур только с малым числом центральных вихрей и подтверждает тот факт, что регистрируются лишь смерчи и торнадо с одним или максимум двумя «хвостами» [14]. Образование ведущего центра с концентрически расходящимися окружностями ($m = 0$) в данной работе не рассматривалось.

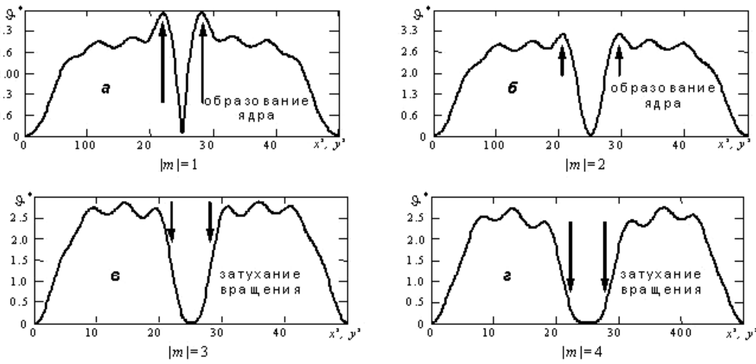

Рис. 4. Диагональный профиль модуля приведенной скорости воздушного течения как функция модуля топологического заряда *m* вблизи поверхности земли (*h* = 0 км). Ядро образуется только при небольшом числе вихрей (*а*, *б*), в остальных случаях образования ядра не происходит с затуханием вращения в центральной части области. Параметры в начальных условиях: $R_0 = 20$

На рис. 4 помимо образования торнадо приводятся другие решения уравнения (11), которые не дают большого возрастания скорости воздушного течения в области центра. Это означает, что ядро в этих образованиях (рис. 4, *в*, *г*) имеет специфическую форму, присущую циклонам. В центральной части вихревой области наблюдается отсутствие всяких диссипативных структур. Следовательно, она может быть отождествлена с центральной частью атмосферного циклона (область, где $\vartheta^* < 0.64$, и самоорганизации не возникает). Все это означает, что циклоны, в центре которых самоорганизации не наблюдается, и ядро, как у торнадо, не возникает, тоже могут быть описаны уравнением (11), в случае когда количество рукавов в закручивающейся спирали больше 2. Вопрос об описании циклонов требует дополнительных исследований. Скорости воздушных течений у циклонов гораздо меньше по модулю, чем у торнадо, что отражено на рис. 4.

Обсуждение результатов. Условия самоорганизации диссипативных вихревых структур

Применение термодинамического подхода позволяет в качестве промежуточного обобщения работы привести следующие установленные в настоящее время условия самоорганизации.

Термодинамические условия самоорганизации:

1. Скорость изменения энтропии в каждом вихревом воздушном слое со временем уменьшается, что соответствует существованию диссипативных структур.

2. Условие боковой ограниченности вихревого бассейна: на границе зоны вихреобразования скорость изменения энтропии равна нулю и меняет знак за пределами бассейна.

Гидродинамические условия самоорганизации:

1. Ограниченность по высоте: отсутствие вихреобразования на больших высотах из-за повышения вязкости.

2. Наличие поперечного размера самоорганизованной системы вихрей обусловлено конкуренцией между приращением и распространением импульса в условиях вязкости.

3. Наличие сильной положительной обратной связи между проекциями горизонтальных скоростей ϑ_x^* и ϑ_y^*, что и приводит к обострению.

4. Ограничение на модуль горизонтальной скорости $\vartheta^{*2} \geq 4q^* / \alpha_1^*(1-4c_2^2/9)$, обусловлено интенсивностью источников и стоков движения.

5. Ограничение на константу уравнения (11): $c_2^2 \leq \alpha_2^{*2} / \alpha_1^{*2}$.

6. Условие левой закрутки $m = -1$, правой — $m = +1$.

7. Ограничение на топологический заряд для образования ядра $|m \leq 2|$.

Условие устойчивости вихревых структур. Анализ устойчивости решений уравнения Курамото — Цузуки приводит к неравенству: $(c_1^2+1)k^4 + 2(1+c_1c_2)k^2 > 0$, $k = \pi / l_0$. Чтобы неравенство выполнялось для любого k, необходимо выполнение $-1 < c_1c_2 < 1$. Данное условие является критерием устойчивости турбулентных структур в атмосферных вихрях, следовательно, необходимым условием существования таких вихрей.

Уменьшение величины $R_0 \to 1$ в начальных условиях, связанное с влажностью воздуха, в нижних слоях приводит к существенному обеднению структуры вихрей и даже к их исчезновению (рис. 3, *б*) и тем самым к более реальному результату, когда между землей и облаком виден только передвигающийся хобот образовавшегося торнадо.

Авторы признательны профессору, доктору физико-математических наук Б.Т. Породнову за обсуждение работы и ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский О.М., Опарин А.М.* Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. М.: Наука, 2000. 223 с.

2. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. С. 544.

3. *Арсеньев С.А., Бабкин В.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н.* Теория мезомасштабной турбулентности: Вихри атмосферы и океана. М.; Ижевск, 2010. 308 с.

4. *Самарский А.А., Курдюмов С.П., Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* Моделирование нелинейных явлений в современной науке // Информатика и научно-технический прогресс. М.: Наука, 1987. С. 69–91.

5. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems // Progr. Theor. Phys. 1975. 54. P. 687–699.

6. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1973. 511 с.

7. *Schmitter E. D.* Modeling tornado dynamics and the generation of infrasound, electric and magnetic fields // Natural hazards and earth system sciences. 2010. 10. P. 295−298.

8. *Arsen'yev S.A.* Mathematical modeling of tornadoes and squall storms // GEOSCIENCE FRONTIERS. 2011. № 2 (2). P. 215−221.

9. *Журавлев В.А.* Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях. М.: Наука, 1979. 136 с.

10. *Самарский А.А.* Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание. М.: Наука, 1988. 192 с.

11. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 256 с.

12. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г.* Режимы с обострением: Достижения и перспективы // Проблемы численного анализа и прикладной математики. Львов, Украина, 13–16 сентября 2004 г. Посвящается юбилею А.А. Самарского.

13. *Dotzek N., Griesler J., Brooks H.E.* Statistical modeling of tornado intensity distributions // Atmospheric Research. 2003. 67–68. P. 163–187.

G.P. Bystraj, I.A. Lykov, S.A. Okhotnikov

VORTEX FORMATION IN THE ATMOSPHERE UNDER HIGH HUMIDITY WITH NONLINEAR SINKS AND SOURCES

Under a mathematical simulation of highly nonequilibrium and nonlinear processes of impulse transfer in the atmosphere with heavy vertical humidity gradients, the paper suggests an original approach basing on equations of impulse transfer with a nonlinear function of sources and sinks. The nonlinear function of sources and sinks is introduced basing on this thermodynamic approach resulting in a blow up regime. The development of this hydrodynamic regime, caused by the nonlinear medium itself, results in self organization which is revealed and described using a computation of thermodynamic characteristics. Basing on a competition between processes of impulse increment and extension, subject to demonstration being an occurrence of a new medium characteristic — a spatial diameter of an arising self organized structure.

Turbulent flow, mathematical simulation, thermodynamic approach, nonlinear equation, nonequilibrium process, nonlinear sinks and sources, blow up regime, self organization, vortex formation.