Е.Н. Шевченко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНОГЕННОГО РИСКА ОТ ОБЪЕКТОВ ОБУСТРОЙСТВА НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Анализируется возможность оценки риска с использованием аппарата двумерных вероятностных распределений. Приведены двумерные функции плотности распределения риска для случаев независимых случайных величин вероятности и ущерба; линейной и экспоненциальной зависимости между вероятностью и ущербом.

Нефтегазодобыча, модель, техногенный риск, обустройство.

Известно, что риск определяется как произведение вероятности нежелательного события на величину ущерба от него

$$R = Q \cdot C, \tag{1}$$

где R — риск, Q — вероятность исходного события, C — ущерб от данного события [1, 2].

Две в общем случае независимые переменные Q и C образуют двумерное пространство.

На этом пространстве может быть определена двумерная функция R, которая представляет множество всех значений риска R_{ii}, соответствующих всевозможным комбинациям вероятностей Q_i и ущербов C_i:

$$R_{ii} = Q_i \cdot C_i.$$

Одна из сложностей построения пространства рисков состоит в том, что ущербы от разных событий (даже для одной и той же системы) могут исчисляться в разных единицах измерения, зачастую несопоставимых. Поэтому представляется целесообразным переход к функциям распределений как вероятности исходных событий, так и ущербов.

Переменные ущерба C и вероятности Q считаются независимыми. Однако известная кривая Фармера описывает не что иное, как экспериментальную зависимость между дозой облучения в результате аварии и вероятностью аварии для атомных электростанций США (рис.) [4].

Можно предположить, что подобная зависимость является свойством системы, спроектированной человеком, а не свойством природы ущербов и вероятностей как таковых.

Анализ функции плотности распределения риска как функции случайных величин вероятности исходных событий аварий и ущерба от них

Рассмотрим риск как функцию случайных величин. Пусть имеется система двух непрерывных дифференцируемых случайных величин (Q, C) с плотностью распределения $f_{QC}(q, c)$. Случайная величина R связана с Q и C функциональной зависимостью

$$F_R(r) = \varphi(Q, C). \tag{2}$$

Требуется найти закон распределения величины R.

Функция распределения величины R

$$R(r) = P(R < r) = P[\varphi(Q, C) < r]. \quad (3)$$

Для того чтобы выполнялось неравенство (3), случайная точка (Q, C) должна попасть в область W, где значения функции $\varphi(Q, C)$ меньше текущего значения r, и, следовательно,

$$F_R(r) = P[(Q, C) \subset W] = \iint_W f_{QC}(q,c)dqdc, \quad (4)$$

где W — область, в которой $R < r$.

Дифференцировав $F_R(r)$ по r, получим плотность распределения величины R:

$$f_R(r) = F'_R(r).$$

Если известен конкретный вид функции $\varphi = \varphi(q, c)$, можно выразить пределы интегрирования через функцию φ и написать выражение $f_R(r)$ в явном виде.

Так как принято считать, что СВ R есть произведение СВ Q и C, то очевидно, что уравнение кривой $\varphi = qc$ — гипербола, асимптоты которой совпадают с осями координат. Область W при этом находится под графиком функции $\varphi = \varphi(q, c)$ (рис.).

Учтем, что рассматриваемые величины определены только в первом квадранте (рис.). Буквой W обозначена область, в которой $R < r$, что очевидно из рис., так как плоскость $R = r$ делит поверхность на две части: выше и ниже этой плоскости.

Тогда функция распределения СВ R имеет вид

$$F_R(r) = P(R < r) = P(R < q \cdot c) = \iint_W f_{QC}(q,c)dqdc = \int_0^\infty \int_0^{r/q} f_{QC}(q,c)dqdc, \quad (5)$$

а плотность распределения $f_R(r)$ после дифференцирования выражения (5) по r равна

$$f_R(r) = \int_0^\infty \frac{1}{q} f\left(q, \frac{r}{q}\right)dq. \quad (6)$$

Здесь и далее $c = \frac{r}{q}$. Недостатком выражения (6) является то, что в нем нет в явном виде функции φ, которая входит неявно через предел интегрирования r/q в (5).

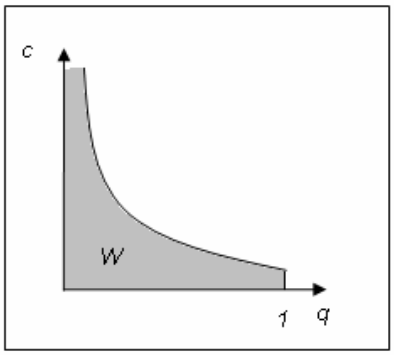

Рис. Область интегрирования функции распределения риска

Область интегрирования W (рис.) подчинена условиям

$$W: \begin{cases} 0 \le q \le 1; \\ 0 \le c \le r/q. \end{cases}$$

Тогда с учетом ограничения области определения по оси вероятности функция распределения величины R принимает вид

$$F_R(r) = \iint\limits_{(W)} f_{QC}(q,c)dcdq = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{r/q} f_{QC}(q,c)dcdq\,. \qquad (7)$$

И соответственно функция плотности распределения f_R:

$$f_R(r) = \int\limits_0^1 \frac{1}{q} f_{QC}(q,\frac{r}{q})dq\,. \qquad (8)$$

Теперь область интегрирования по вероятности имеет естественное ограничение — интервал от 0 до 1.

Таким образом, если будет известен вид законов распределения $f_Q(q)$ и $f_C(c)$, то можно определить вид и значение параметров функции распределения $F_R(r)$ и плотности $f_R(r)$.

Формула (8) при независимых величинах вероятности и ущерба видоизменится следующим образом:

$$f_R(r) = \int\limits_0^1 \frac{1}{q} f_Q(q) f_C(\frac{r}{q})dq\,. \qquad (9)$$

Получены функции и найдены их числовые значения:

Распределения вероятности и ущерба	Плотность распределения риска
Q — нормальн. $m_q > 3\sigma_q$ C —нормальн. $m_c > 3\sigma_c$	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_q\sigma_c}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-(q-m_q)^2/2\sigma_q^2 - (r/q-m_c)^2/2\sigma_c^2\right\}dq$
Q-Рэлея C-Рэлея	$f_R(r) = \frac{r}{\sigma_q^2\sigma_c^2}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-q^2/2\sigma_q^2 - r^2/2q^2\sigma_c^2\right\}dq\,.$
Q — Вейбулла C — Вейбулла	$f_R(r) = \alpha_q\lambda_q\alpha_c\lambda_c r^{\alpha_c-1}\int_0^1 q^{\alpha_q-\alpha_c-1}\exp\{-\lambda_q q^{\alpha_q} - \lambda_c(\frac{r}{q})^{\alpha_c}\}dq.$
Q — логнормальн. C — логнормальн.	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi r\sigma_q\sigma_c}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-\frac{(\ln q - m_q)^2}{2\sigma_q^2} - \frac{(\ln r/q - m_c)^2}{2\sigma_c^2}\right\}dq.$
Q — Стьюдента C — Стьюдента	$f_R(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_c+1}{2}\right)}{\pi\sqrt{n_q n_c}\,\Gamma\left(\frac{n_q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_c}{2}\right)}\int_0^1 \frac{1}{q}\left(1+\frac{q^2}{n_q}\right)^{-\frac{n_q+1}{2}}\left(1+\frac{r^2/q^2}{n_c}\right)^{-\frac{n_c+1}{2}}dq\,.$
Q — усеч. норм. C — усеч. норм.	$f_R(r) = \frac{\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-\frac{(q-m_q)^2}{2\sigma_q^2} - \frac{(r/q-m_c)^2}{2\sigma_c^2}\right\}dq}{2\pi\sigma_q\sigma_c\left[\Phi\left(\frac{a_{2q}-m_q}{\sigma_q}\right)-\Phi\left(\frac{a_{1q}-m_q}{\sigma_q}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{a_{2c}-m_c}{\sigma_c}\right)-\Phi\left(\frac{a_{1c}-m_c}{\sigma_c}\right)\right]}.$

Перейдем к рассмотрению случая, когда риск является функцией случайных величин вероятности исходных событий Q и ущерба C, предполагая, что

Q и C не являются независимыми. Допустим, что ущерб есть функция вероятности исходных событий:

$$c = \alpha(q). \tag{10}$$

Риск с учетом зависимости между вероятностью исходных событий и ущербом определяется по формуле

$$F_R(q,c) = \iint\limits_{W_1} f_{C/Q}(q,c)\, f_Q(q)\, dc\, dq. \tag{11}$$

Найдем плотность распределения ущерба в случае его линейной зависимости от вероятности исходных событий

$$c = \alpha(q) = -k_1 q + k_0.$$

Выражение для плотности распределения риска f_R:

$$f_R(r) = F_R'(r) = \frac{1}{k_1}\int_0^1 \frac{1}{q}\, f_Q\left(\frac{k_0 - r/q}{k_1}\right) f_Q(q)\, dq, \qquad k_1 > 0. \tag{12}$$

Найдем плотность распределения ущерба в случае его экспоненциальной зависимости от вероятности исходных событий

$$c = \alpha(q) = k_0\, e^{-k_1 q}.$$

откуда после дифференцирования по r следует выражение для плотности распределения риска f_R:

$$f_R(r) = \frac{1}{r k_1}\int_0^1 f_Q\left(\frac{\ln k_0 - \ln r/q}{k_1}\right) f_Q(q)\, dq, \qquad k_0, k_1 > 0. \tag{13}$$

Распределение СВ вероятности Q	Функция плотности распределения риска $f_R(r)$
Нормальное	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2 k_1}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Q^2}\left[\left(\frac{k_0 - r/q}{k_1} - m_Q\right)^2 + (q - m_Q)^2\right]\right\} dq$, $k_1 > 0$.
Логарифмически нормальное	$f_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q^2 k_1}\int_0^1 \frac{k_1}{q^2(k_0 - r/q)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Q^2}\left[\left(\ln\left(\frac{k_0 - r/q}{k_1}\right) - m_Q\right)^2 + (\ln q - m_Q)^2\right]\right\} dq$, $k_1 > 0$.
Вейбулла	$f_R(r) = \frac{(\alpha_Q \lambda_Q)^2}{k_1^{\alpha_Q}}\int_0^1 \frac{1}{q}(q(k_0 - r/q))^{\alpha_Q - 1}\exp\left\{-\lambda_Q\left[q^{\alpha_Q} + \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1}\right)^{\alpha_Q}\right]\right\} dq$, $k_1 > 0$.
Экспоненциальное	$f_R(r) = \frac{\lambda_Q^2}{k_1}\int_0^1 \frac{1}{q}\exp\left\{-\lambda_Q\left[q + \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1}\right)\right]\right\} dq$, $k_1 > 0$.
Рэлея	$f_R(r) = \frac{1}{k_1^2\sigma_Q^4}\int_0^1 (k_0 - r/q)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Q^2}\left[q^2 + \left(\frac{k_0 - r/q}{k_1}\right)^2\right]\right\} dq$, $k_1 > 0$.
Стьюдента	$f_R(r) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n_Q + 1}{2}\right)}{k_1 \pi n_Q \Gamma^2\left(\frac{n_Q}{2}\right)}\int_0^1 \frac{1}{q}\left[1 + \frac{(k_0 - r/q)^2}{n_Q k_1^2}\right]^{-\frac{n_Q+1}{2}}\left[1 + \frac{q^2}{n_Q}\right]^{-\frac{n_Q+1}{2}} dq$, $k_1 > 0$.

В исследовании получены численные значения функций распределения риска для разных законов распределения СВ Q вероятности сходных событий: нормального, Вейбулла, Стьюдента, логарифмически нормального.

Заключение

Полученные аналитические выражения могут использоваться для оценки техногенного риска систем. Анализ численных значений позволяет сделать сравнительные выводы о свойствах риска в различных предположениях о зависимости вероятности исходных событий аварий и ущербов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rasmussen, Norman et al.* Reactory Safety Study. WASH-1400. Washington, DC: US NRC, 1975.
2. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 544 с.
3. *Острейковский В.А., Швыряев Ю.В.* Безопасность атомных станций: Вероятностный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 352 с.
4. *Острейковский В.А.* Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф. М.: Высш. шк. 2005. 326 с.
5. *Половко А.М., Гуров С.В.* Надежность технических систем и техногенный риск. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
6. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1998. 576 с.

Ye.N. Shevtchenko

MATHEMATICAL MODELS OF A TECHNOGENIC RISK REGARDING DEVELOPMENT FACILITIES OF OIL AND GAS FIELDS

Subject to analysis being a possibility to assess risk using a unit of two dimensional probability distributions. The paper presents two dimensional density functions of risk distribution for a case of an independent random variable of probability and damage, as well as for a case of a linear and exponential dependence between probability and damage.

Oil and gas production, model, technogenic risk, development.