В.Л. Якушев, В.Н. Симбиркин, А.В. Филимонов

СЕЙСМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ПОИСКА СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ STARK ES

Проанализирован опыт применения в программном комплексе STARK ES блочного метода Ланцоша со сдвигами для решения задач на собственные значения применительно к расчету зданий и сооружений на сейсмические воздействия. Представлены критерии оценки и отбора необходимого количества форм собственных колебаний с учетом как поступательных, так и вращательных компонент движения грунтового основания. Приведены результаты использования рассматриваемых критериев в программном комплексе STARK ES на примерах моделей реальных строительных объектов.

Метод конечных элементов, метод Ланцоша, эффективная модальная масса, сейсмическая нагрузка.

Введение

В проектной практике расчет зданий и сооружений на сейсмические воздействия выполняют, как правило, с помощью линейно-спектрального метода в частотной области и метода разложения по собственным формам во временной области. Оба метода предполагают нахождение частот и форм собственных колебаний. Чтобы результат был достоверным, необходимо учесть достаточное их количество. В сейсмических нормах ряда стран (Еврокод 8, UBC-97, сейсмические нормы Украины, проект актуализированного СНиП II-7-81) принято, что сумма модальных масс по каждому из направлений сейсмического воздействия должна быть не менее установленной границы [1, 2, 7].

Однако при современных требованиях к детальности и размерности конечно-элементных моделей данное требование представляет сложную вычислительную задачу. Во-первых, необходимо использовать метод нахождения собственных форм и частот, квазилинейно зависящий от количества собственных форм и имеющий критерий остановки при достижении требуемой суммы модальных масс. Скорость метода также имеет существенное значение. Во-вторых, при сохранении всех форм колебаний их количество может быть очень велико для последующего расчета.

В данной работе представлен блочный метод Ланцоша совместно с фронтальным методом. Метод Ланцоша позволяет находить много собственных частот и форм колебаний и практически линейно зависит от их количества. Преимуществом использования фронтального метода является возможность решения системы линейных алгебраических уравнений большой размерности [1]. Особенностью алгоритма является возможность нахождения достаточного количества собственных форм с дополнительной фильтрацией.

Критерием остановки алгоритма служит условие достижения требуемой суммы модальных масс отобранных форм по трем взаимноперпендикулярным направлениям, совпадающим с глобальными осями координат. В процессе решения производится фильтрация найденных форм колебаний, если значения модальных масс меньше заданного порога. Дополнительно введен критерий оценки вращательного движения грунтового основания [4].

Представленные в статье методики реализованы в программных средствах серии STARK ES, предназначенных для массового применения при строительном проектировании. Приведены некоторые результаты расчетов на собственные колебания.

Описание алгоритма

1. Реакция конструкции на сейсмическое воздействие

Для определения отклика рассматриваемой конструкции на сейсмическое воздействие рассматривается процесс ее вынужденных колебаний, описываемый дифференциальным уравнением второго порядка:

$$M\ddot{\vec{U}}(t)+C\dot{\vec{U}}(t)+K\vec{U}(t)=\vec{F}(t)\,, \tag{1}$$

где (при использовании метода конечных элементов)

M — матрица масс системы;

C — матрица демпфирования;

K — матрица жесткости системы;

$\vec{U}(t)$ — вектор узловых перемещений;

$\vec{F}(t)$ — вектор узловых сил, характеризующий внешнее динамическое воздействие.

В пространстве собственных форм система уравнений равновесия (1) для линейно деформируемых систем при постоянной матрице жесткости разделяется, и вектор перемещений $\vec{U}(t)$ можно аппроксимировать суммой по *p* учитываемым собственным формам [3]:

$$\vec{U}(t)=\Phi^T\vec{\Psi}(t);\;\; \Phi=\lfloor\vec{\varphi}_1\;\vec{\varphi}_2\;...\;\vec{\varphi}_2\rfloor, \tag{2}$$

где $\Phi[n\times p]$ — матрица собственных форм системы, в которой столбцами являются собственные формы;

n — количество степеней свободы (в общем случае — 6 степеней свободы в узле);

$\vec{\varphi}_j$ — вектор *j*-й формы собственных колебаний;

p — количество учитываемых форм и частот колебаний;

$\vec{\Psi}(t)$ — вектор модальных коэффициентов.

Формы колебаний ортонормированы по отношению к матрице масс, т.е.

$$\vec{\varphi}_i^T M\vec{\varphi}_j=1 \text{ при } i=j,\; \vec{\varphi}_i^T M\vec{\varphi}_j=0 \text{ при } i\neq j. \tag{3}$$

Матрица демпфирования *C* задается таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\vec{\varphi}_i^T C\vec{\varphi}_j=2\omega_j\xi_i\delta_{ij}, \tag{4}$$

где ω_j — частота *j*-й формы колебаний;

ξ_i — коэффициент демпфирования для *i*-й формы колебаний;

δ_{ij} — символ Кронекера.

Такое представление демпфирования означает, что общая диссипация энергии в системе складывается из суммы энергий, поглощенных по каждой из собственных форм. Этот способ аппроксимации суммарной диссипации энергии имеет ограничения для конструкций, обладающих широким спектром свойств материалов, например при исследовании взаимодействия сооружения с основанием или при наличии местных демпферов.

После подстановки (2) в уравнения (1), используя свойство ортонормированности векторов (3) и представления демпфирования (4), получим систему из *p* независимых уравнений вида

$$\ddot{\Psi}_j(t) + 2\omega_j\xi_j\dot{\Psi}_j(t) + \omega_j^2\Psi_j(t) = \chi_j(t). \tag{5}$$

Правые части уравнений (5) получим, рассматривая сейсмическую нагрузку на систему как кинематическое воздействие с переменным во времени полем ускорений. При этом используем интегральную модель сейсмического воздействия [6], согласно которой сейсмическое движение грунта основания конструкции описывается вектором ускорения поступательного движения $\ddot{\vec{X}}$ и вектором ускорения ротации $\ddot{\vec{\alpha}}$. В общем случае для пространственной задачи могут быть определены три компоненты вектора $\ddot{\vec{X}}$ и три компоненты вектора $\ddot{\vec{\alpha}}$: $\ddot{\vec{X}}^T = \left\|\ddot{X}_1(t), \ddot{X}_2(t), \ddot{X}_3(t)\right\|$, $\ddot{\vec{\alpha}}^T = \left\|\ddot{\alpha}_1(t), \ddot{\alpha}_2(t), \ddot{\alpha}_3(t)\right\|$.

В *j*-м уравнении правая часть может быть представлена как

$$\chi_j(t) = \vec{\varphi}_j^T M\left(\vec{A}_x\ddot{X}_x(t) + \vec{A}_y\ddot{X}_y(t) + \vec{A}_z\ddot{X}_z(t) + \vec{B}_x\ddot{\alpha}_x(t) + \vec{B}_y\ddot{\alpha}_y(t) + \vec{B}_z\ddot{\alpha}_z(t)\right), \tag{6}$$

где вектора $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$ связывают проекции ускорения основания поступательного воздействия $\ddot{X}_x(t), \ddot{X}_y(t), \ddot{X}_z(t)$ в глобальной системе с ускорениями в направлении каждой степени свободы системы как абсолютно жесткого тела; аналогично вектора $\vec{B}_x, \vec{B}_y, \vec{B}_z$ устанавливают взаимосвязь между проекциями ускорения вращательного воздействия $\ddot{\alpha}_x(t), \ddot{\alpha}_y(t), \ddot{\alpha}_z(t)$ с ускорениями в направлении каждой степени свободы.

Взаимосвязь между вектором ускорения, заданным в глобальной системе координат, и вектором ускорения, заданным в системе координат, связанной с грунтовым основанием, можно выразить на примере $\ddot{\vec{X}}(t)$:

$$\left\{\ddot{X}_x(t) \quad \ddot{X}_y(t) \quad \ddot{X}_y(t)\right\}^T = R\left\{\ddot{X}_1(t) \quad \ddot{X}_2(t) \quad \ddot{X}_3(t)\right\}^T, \tag{7}$$

где *R* — матрица поворота из системы координат, связанной с грунтовым основанием, в глобальную систему координат. Аналогично и для вектора $\ddot{\vec{\alpha}}(t)$.

Таким образом, исходными данными для определения $\chi_j(t)$ являются $\ddot{X}_i(t)$ и $\ddot{\alpha}_i(t)$ — компоненты векторов ускорений сейсмического движения грунта. Компонентами вектора $\ddot{\vec{X}}$ являются зарегистрированные либо синтезированные акселерограммы. Компонентами вектора $\ddot{\vec{\alpha}}$ являются зарегистрированные либо определенные на основании анализа поступательных компонент акселерограммы [4].

2. Критерии модальных масс

Модальной массой при поступательном сейсмическом воздействии в направлении глобальных осей называется величина:

$$m_i^x = \frac{(\vec{\varphi}_j^T M\vec{A}_x^T)^2}{\vec{A}_x^T M\vec{A}_x}, \quad m_i^y = \frac{(\vec{\varphi}_j^T M\vec{A}_y^T)^2}{\vec{A}_y^T M\vec{A}_y}, \quad m_i^z = \frac{(\vec{\varphi}_j^T M\vec{A}_z^T)^2}{\vec{A}_z^T M\vec{A}_z}. \tag{8}$$

Формулы (8) соответствуют формулам, представленным в [2, 7].

По аналогии введем формулы для вращательного сейсмического воздействия в направлении глобальных осей:

$$m_i^{\varphi x} = \frac{(\vec{\varphi}_j^T M \vec{B}_x^T)^2}{\vec{B}_x^T M \vec{B}_x}, \quad m_i^{\varphi y} = \frac{(\vec{\varphi}_j^T M \vec{B}_y^T)^2}{\vec{B}_y^T M \vec{B}_y}, \quad m_i^{\varphi z} = \frac{(\vec{\varphi}_j^T M \vec{B}_z^T)^2}{\vec{B}_z^T M \vec{B}_z}. \qquad (9)$$

3. Критерий отбора

При решении задач было обнаружено, что суммы модальных масс сходятся неравномерно, т.е. в искомом диапазоне присутствуют формы с малой модальной массой. При сохранении всех значений могут возникнуть проблемы при последующем расчете спектральным методом или методом разложения на собственные формы, например, такие как нехватка памяти или существенное замедление расчета. Для уменьшения количества собственных форм введен минимальный порог для каждой модальной массы. Собственная форма исключается, если не превышен порог хотя бы для одной модальной массы. При этом прерывание алгоритма наступает только после достижения требуемой суммы модальных масс сохраненных форм.

4. Метод Ланцоша

Для нахождения собственных значений был применен блочный метод Ланцоша со сдвигами. Данный метод совместно с фронтальным методом показал хорошую эффективность для большеразмерных задач [1]. Алгоритм позволяет находить большое количество собственных значений, разбивая искомый интервал на подынтервалы. После нахождения части собственных значений подсчитывается и выводится информация о модальных массах для найденных, отобранных и исключенных форм. При достижении требуемой суммы модальных масс для отобранных форм происходит прерывание алгоритма.

Примеры

На рис. 1 отображены две кратные поступательные формы и вращательная форма относительно вертикальной оси простой симметричной конструкции. В табл. представлены значения модальных масс для данной конструкции. Как видно из таблицы, отбор собственных значений только на основании порога модальных масс по поступательным направлениям приведет к исключению 3-й формы с 91,97 % массы по вращательному направлению.

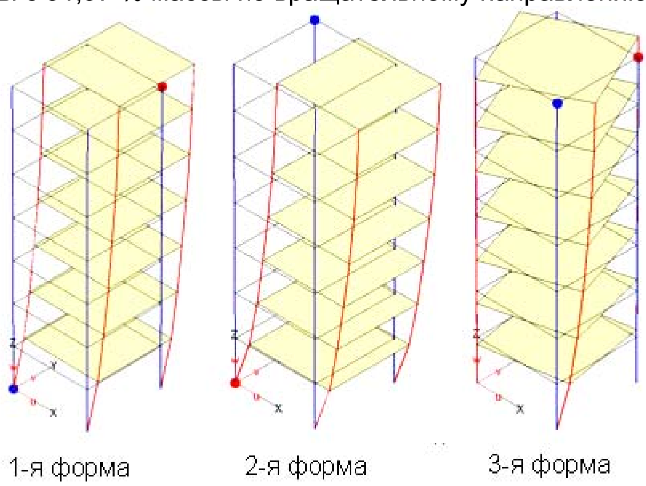

Рис. 1. Формы симметричной конструкции

Модальные массы для симметричной конструкции.

Форма	Частота, Гц	M_x	M_y	M_z	rM_x	rM_y	rM_z
1	0,552211	1,23	90,18	0	94,05	1,28	0
2	0,552211	90,18	1,23	0	1,28	94,05	0
3	0,914728	0	0	0	0	0	91,97

На рис. 2 представлен пример каркасного здания. Сумма модальных масс при нахождении первых 100 форм колебаний составляет M_x = 91 %, M_y = 89 %, M_z = 35 %. Как видно на рис. 3, сумма модальных масс для вертикального направления сходится достаточно медленно, и для учета 70 % модальной массы по вертикальному направлению необходимо 500 форм колебаний. При введении порога на модальные массы по горизонтальным направлениям 1 %, а по вертикальному — 0,1 % удалось отобрать 100 форм колебаний с M_x = 91 %, M_y = 88 %, M_z = 69 %, т.е. исключить 400 форм.

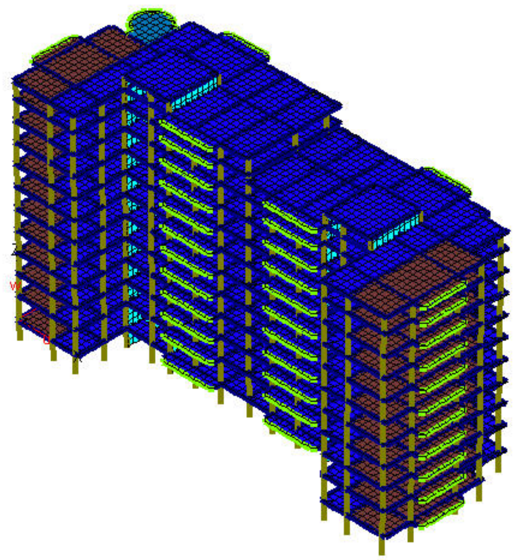

Рис. 2. Общий вид конечно-элементной модели каркасного здания

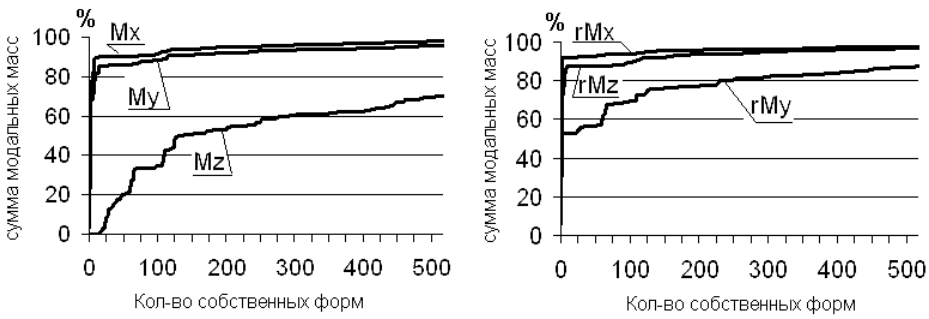

Рис. 3. Графики суммы модальных масс для каркасного здания

На рис. 4 показан общий вид модели покрытия стадиона (слева) и пример исключенной формы колебаний (справа). Исключенные формы не оказывают существенного влияния на результаты последующего сейсмического расчета и соответствуют колебаниям гибких элементов.

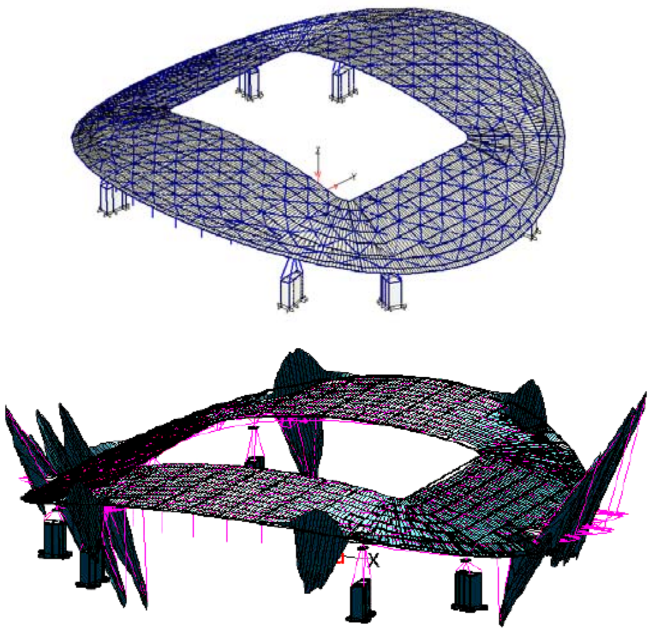

Рис. 4. Общий вид модели покрытия стадиона и пример формы колебаний, исключаемой при отборе

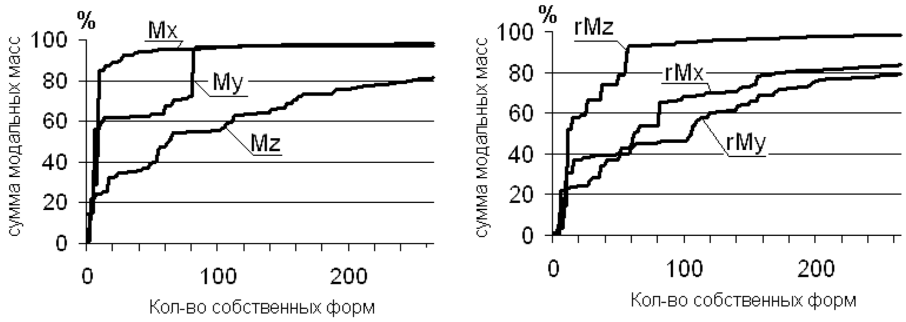

Рис. 5. Графики модальных масс модели покрытия стадиона

Выводы

Введение критерия модальных масс по вращательным компонентам позволяет отобрать формы, существенно влияющие на решение при учете ротационной составляющей сейсмического воздействия.

Использование критерия отбора позволяет достичь требуемой суммы модальных масс отобранных форм в автоматическом режиме при существенном сокращении их количества, что заметно упрощает анализ общей сейсмостойкости сооружения с гибкими частями или элементами, колебания которых не оказывают значительного влияния на суммарную сейсмическую реакцию сооружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якушев В.Л., Жук Ю.Н., Симбиркин В.Н., Филимонов А.В.* Реализация методов расчета для большеразмерных задач строительной механики в программном комплексе STARK ES // Вестн. кибернетики. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2011. № 10. С. 109–116.
2. *Безделев В.В., Буклемишев А.В., Сутырин Ю.А.* Предложения по корректировке СНиП «Строительство в сейсмических районах» в части формулирования спектрального метода расчета Ч. 1 // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2000. № 6. С. 43–47.
3. *Клаф, Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
4. *Назаров Ю.П., Симбиркин В.Н., Филимонов А.В.* Динамический расчет пространственных сооружений с использованием интегральной модели сейсмического воздействия // Доклады VI Рос. нац. конф. по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию, г. Сочи, 19–24 сентября 2005 г. 8 с.
5. *Назаров Ю.П.* Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. М.: Наука, 2010. 468 с.
6. *Рекомендации* по определению расчетной сейсмической нагрузки для сооружений с учетом пространственного характера воздействия и работы конструкции. М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 1989. 142 с.
7. *Фиалко С.Ю.* Реализация в программном комплексе SCAD блочного метода Ланцоша со сдвигами применительно к сейсмическому воздействию // CADmaster. 05.2007. № 40. С. 102–105.

V.L. Yakushev, V.N. Simbirkin, A.V. Filimonov

A SEISMIC SETTING WITH REGARD TO SEARCH OF PRINCIPAL MODES IN THE STARK ES SOFTWARE

Subject to analysis being an experience of using a decomposition Lanczos method with shifts in the STARK ES software to solve the eigenvalue problems as applied to seismic loading correction of buildings and structures. The paper supplies evaluation and selection criteria of a required quantity of principal modes with provision for advance and rotary motion components of the foundation soil, quoting results of applying the considered criteria in the STARK ES software, illustrated by models of real construction projects.

Finite element method, Lanczos method, effective modal mass, seismic load.