А.В. Стрекалов, М.С. Королев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Предпринята попытка обозначить пути решения задачи, связанной с созданием имитатора техногенной гидросистемы сложной структуры (промысловые системы сбора нефти и газа, системы поддержания пластового давления). Статья предназначена для профессиональных программистов.

Параллельные вычисления, формализация, модель пластовых систем.

Особенный интерес для разработок в области математического моделирования представляют сложные системы с развитой структурой, состоящие из множества элементов, которые объединяют процессы движения жидкостей в наземных трубопроводных сетях, скважинах с фильтрационно-энергетическими процессами пластовых систем. Целевые параметры такого рода систем обычно трудно предсказуемы и сильно изменяются при изменении свойств хотя бы одного элемента системы [1].

В связи с тем что уровень воздействия на пластовую систему определяется гидравлическими режимами наземных технических гидравлических сетей (ТГС) и скважин, основным аспектом практического применения описанных здесь моделей и алгоритмов является повышение эффективности наземных сетей с позиции минимизации энергетических затрат и максимизации эффективности процесса нефтеизвлечения.

Большинство ограничений в известных моделях теории гидравлических цепей (ТГЦ) [1] связаны с фиктивными граничными условиями, ограничениями по виду структуры системы, требованиями к виду функций (замыкающих отношений), отсутствием взаимосвязи между гидравлическими режимами и важными техническими показателями элементов (например, взаимодействие с природными системами, перемерзание участков, аварийные режимы работы насосных агрегатов, изменение состояния обратных клапанов, переход гидравлической энергии в тепловую и т.п.).

В данной статье рассматривается создание наиболее универсальной модели и метода ее расчета, ориентированного на распараллеливание вычислений.

Техногенные гидросистемы (ТГС) поддержания пластового давления обеспечивают процесс заводнения и включают в себя:

- объекты поступления жидкостей и газов извне (границы системы);
- системы подготовки (сепарации компонентов);
- насосные станции (источники гидравлической энергии);
- сети трубопроводов (структурированные каналы транспорта текучих сред);
- запорной и дроселлирующей арматуры, оборудования устья нагнетательных скважин (элементы регулирования).

Таким образом, ТГС состоят из различных элементов, соединенных в определенном порядке и взаимодействующих посредством текучей среды. По-

рядок соединения элементов (структуру системы) можно называть ***гидравлической цепью*** — по аналогии с теорией электрических цепей.

Объекты — это реальные устройства, входящие в ТГС, ***звенья*** — их гидравлические модели. ***Узел*** цепи — точка соединения звеньев. Каждому звену принадлежит ровно два узла (начала и конца). С каждым узлом связано минимум одно звено.

В отличие от электрических, в гидравлических цепях некоторым узлам может соответствовать менее двух звеньев. Иначе говоря, структура ТГС может иметь разомкнутый характер. Узел, связанный более чем с одним звеном, называется ***транзитивным***, остальные узлы — ***активными***.

Искомыми параметрами ТГС являются следующие величины:

- массовые и объемные расходы текучей среды во всех объектах, составляющих систему;
- давления во всех узлах структуры ТГС;
- перепады давления между точками входа и выхода текучей среды во всех элементах ТГС.

Здесь рассматривается задача потокораспределения, т.е. нахождения расходов и давлений во всех элементах цепи при установившемся изотермическом течении несжимаемой жидкости.

В наиболее универсальной постановке рассматривается ТГС с произвольной структурой [2, 3], состоящей из *m* узлов, из которых *t* узлов являются транзитивными; *n* звеньев и *c* путей возможного перемещения текучей среды между активными узлами.

Гидравлическая цепь, а точнее, ее топологическая схема может быть представлена ориентированным графом, ациклическим или не полностью циклическим. По принятым в теории графов понятиям звено является ветвью графа, а узел — вершиной.

Будем считать, что для каждого звена $i \in [j_{ib}, j_{ie}]$ (звена *i*, принадлежащего узлам j_{ib} и j_{ie}), где j_{ib} и j_{ie} — его начальный и конечный узлы, задан закон гидравлического воздействия, связывающий перепад давления $\Delta p_i'$ (обусловленный техническими свойствами элемента *i*) на концах звена и установившийся расход q_i:

$$\Delta p_i' = f_i(q_i). \qquad (1)$$

Функции $f_i(q_i)$ — замыкающие отношения характеризуют взаимосвязь перепада давления и расхода, обусловленную внутренними параметрами звена *i*. Вид $f_i(q_i)$, например, зависит от параметров гидравлического сопротивления трубопроводной арматуры, производительности насосов и т.д. (рис. 1).

При этом принимается ряд правил, выполнение которых при формировании основной системы уравнений необходимо для описания функций $f_i(q_i)$ для всех звеньев цепи ТГС (рис. 2).

Данные правила позволяют моделировать ситуации возникновения обратных потоков в насосах, скважинах и т.п. По этой причине описание функций в ранее используемом виде [1], например для труб $f_i(q_i) = s \cdot q^2$, неприемлемо. Требуется замена: $f_i(q_i) = s \cdot q|q|$ (рис. 1).

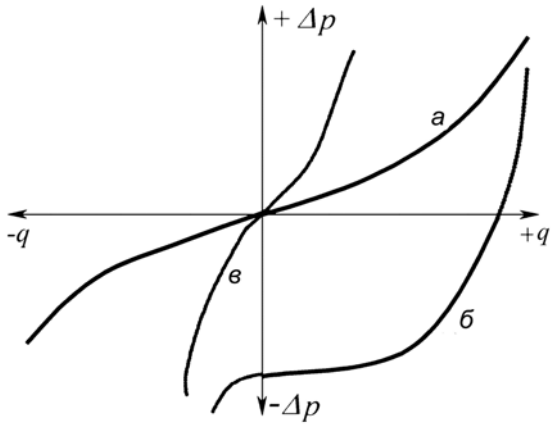

Рис. 1. Некоторые формы функций *f*(*q*) для различных элементов ТГС:
а — объект «труба»; *б* — объект «насос», электропитание включено;
в — объект «насос», электропитание выключено

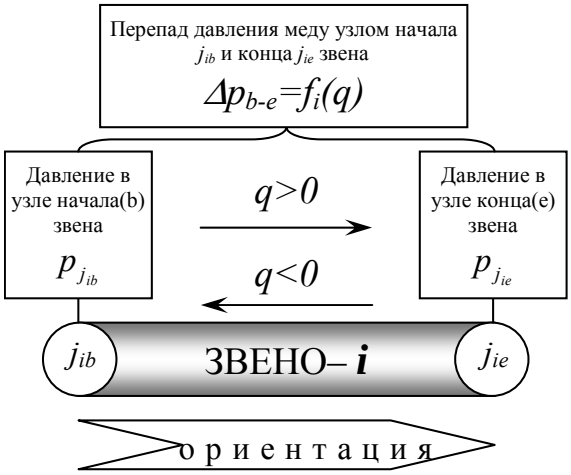

Рис. 2. Схема определения замыкающих отношений *f*(*q*)
произвольного объекта-звена МТГС

Полный перепад давления на концах звена *i* будет зависеть от функции $f_i(q_i)$ и гидростатического перепада при условии нахождения ТГС в поле гравитации

$$\Delta p_i = \Delta p_i' - \Delta z_i = f_i(q_i) - \Delta z_i, \qquad (2)$$

где Δz_i — гидростатический перепад давления $\Delta z_i = \rho g(z_{j_{ib}} - z_{j_{ie}})$, где ρ — плотность текучей среды, *g* — ускорение свободного падения, $z_{j_{ib}}$ и $z_{j_{ie}}$ — высоты узлов j_{ib} и j_{ie} над уровнем моря.

Ранее в работах [2, 3] предлагалось два метода построения систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), для которых были предложены адаптированные численные методы решения. Однако проблемы приведения матриц к определенному виду, вычислительно-емкие процедуры предварительного анализа графа топологической схемы цепи и использование метода

последовательных приближений посредством построения Якобиана и многократного решения системы линейных уравнений (СЛАУ) большой размерности не позволяют эффективно распараллеливать процессы вычислений.

В данной статье предлагается новый метод решения задачи потокораспределения, основанный на физической специфике стационарных процессов в гидравлических системах. Исходной для предлагаемого метода является СНАУ, построенной на основе метода «узловой увязки» [3].

Основой для записи системы уравнений является материальный баланс в транзитивных узлах, выраженный через зависимости $q_i = S_i(\Delta p_i)$ расхода в звене *i* от перепада давления на его концах. Функция $S(\Delta p)$ является обратной функции $f(q)$, т.е. для ее определения в произвольной точке — Δp_0 необходимо в общем случае решить нелинейное уравнение $f(q) - \Delta p_0 = 0$ относительно неизвестного расхода *q*.

Выразив неизвестные расходы q_i через функции $q_i = S_i(\Delta p_i)$ и заменив $\Delta p_i = p_{j_{ib}} - p_{j_{ie}}$, получим уравнения для *t* транзитивных узлов (узлов с неизвестными давлениями), где в каждом уравнении суммируются $S_i(\Delta p_i)$ для звеньев, соединенных (смежных) с транзитивным узлом *j*.

$$\sum_{i \in j} S_i(p_{j_{ib}} - p_{j_{ie}}) = 0, j = 1, 2, \dots t \tag{3}$$

Причем давления в транзитивных узлах являются неизвестными, а давления в активных узлах — константами или функциями от времени, которые могут быть рассчитаны моделью гидросистемы продуктивных пластов.

После приведения (3) к более удобному для решения виду окончательно получим однородную СНАУ относительно неизвестных давлений в транзитивных узлах:

$$\begin{cases} F_1(p_1, p_2, .., p_j, p_m) = 0 \\ \vdots \\ F_j(p_1, p_2, .., p_j, p_m) = 0 \\ \vdots \\ F_t(p_1, p_2, .., p_j, p_m) = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

где $F_j(p_1, p_2, ..., p_j, ..., p_m)$ — функции зависимости суммы массовых или объемных расходов потоков, сходящихся в транзитивном узле *j* от давлений в смежных с ним узлах (в том числе активных).

Рассмотрим суть предлагаемого метода на примере топологической схемы цепи на рис. 3.

В рассматриваемой схеме, как и в любой другой цепи, необходимо найти расходы жидкости q_i для всех звеньев и соответствующие им давления в транзитивных узлах p_j. Причем решение СНАУ (4) позволяет найти только давления в транзитивных узлах. Затем, раздельно решая *n* уравнений вида

$$f_i(q_i) - \Delta p_i = 0 \tag{5}$$

при известных

$$\Delta p_i = p_{j_{ib}} - p_{j_{ie}}, \tag{6}$$

можно найти все q_i.

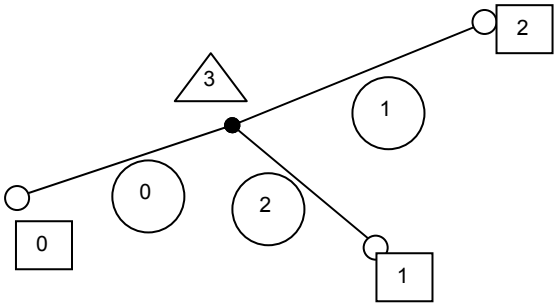

Рис. 3. Пример топологической схемы, состоящей из *n* = 3 звеньев, *m* = 3 узлов, из которых *t* = 1 транзитивных узлов и три активных (с известными давлениями) узла

Предлагаемый здесь метод сводится к последовательным приближениям к неизвестным расходам — q_i и давлениям p_j одновременно. Для этого каждому транзитивному узлу, помимо давления, добавляется свойство емкость — e_j.

1. Выбирается начальное приближение к искомым величинам p_j. Это можно сделать вычислением среднего давления во всех активных узлах. Например:

$$p_j^{(0)} = \overline{p} ,$$

где (0) — итерация *I* = 0;

2. На начало текущей итерации рассчитываются расходы жидкости во всех звеньях решением *n* нелинейных уравнений вида

$$f_i\left(q_i\right) = p_{j_{ib}} - p_{j_{ie}}$$

на основе известных текущих приближений величин давлений в транзитивных узлах.

3. Рассчитывается сумма притоков и оттоков жидкости в каждом транзитивном узле $J_j = \sum_{k=1}^{g_j} q_k$, где *k* — номер звена, инцидентного узлу *j*, g_j — количество звеньев, инцидентных узлу *j*. Причем если решение достигнуто, то во всех транзитивных узлах выполняется условие

$$J_j < \varepsilon , \qquad (7)$$

где ε — абсолютная удовлетворительная погрешность, м^3/с.

При суммировании расходов жидкости в звеньях в соответствии с порядком соединения звеньев с узлом следует величину расхода потока, входящего в узел, брать со знаком «+», а выходящего — со знаком «–».

4. Рассчитывается текущая для данной итерации *I* емкость узлов на основе полученных притоков/оттоков жидкости в узлах

$$e_o^I = e_o^{I-1} + J_j ,$$

где e_o^{I-1} — емкость узла *j* на предыдущей итерации.

5. Расчет новых давлений в транзитивных узлах на основе полученных емкостей узлов проводится по формуле

$$p_j^{(I)} = \varphi \cdot e_j^I, \qquad (8)$$

где φ — параметр инерционности процесса сходимости.

Далее процесс повторяется для новых найденных давлений начиная с пункта 2 до тех пор, пока не выполнится условие (7).

Для увеличения скорости сходимости возможно вместо формулы (8) использовать формулу

$$p_j^{(I)} = \varphi \cdot e_j^I \left| e_j^I \right|$$

или любую формулу, отражающую монотонность данной функции — давления от емкости.

Процесс сходимости характеризуется начальным колебательным процессом, сопровождающимся ростом и падением точности (или погрешности) с одновременным общим снижением амплитуды колебаний погрешности. В зависимости от специфики замыкающих отношений звеньев — $f_i(q)$ и φ процесс сходится, хотя и через существенное количество итерации (100–1000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 276 с.
2. *Стрекалов А.В.* Системный анализ и моделирование гидросистем поддержания пластового давления. Тюмень: Слово, 2002. 324 с.
3. *Стрекалов А.В.* Математические модели гидравлических систем для управления системами поддержания пластового давления. Тюмень: Тюм. дом печати, 2007. 664 с.
4. *Стрекалов А.В.* Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2002611864. Комплекс универсального моделирования технических гидравлических систем поддержания пластового давления (Hydra'Sym). 2002.

A.V. Strekalov, M.S. Korolev

METHOD OF MATHEMATICAL FORMALIZATION REGARDING FLUX DISTRIBUTION FOR AN EFFECTIVE COMPUTING PARALLELIZING

The article is meant for professional programmers, wishing to investigate a problem connected with making an imitator of a man made hydrosystem in a complex structure including field systems of oil and gas gathering, as well as systems of supporting strata pressure. The authors did not intend to create a completed solution algorithm, trying to indicate several ways of solving the problem.

Parallel computing, formalization, model of strata systems.