

В.Л. Якушев, Ю.Н. Жук, В.Н. Симбиркин, А.В. Филимонов

## РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЛЯ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ STARK ES

*Представлен опыт реализации и применения в программном комплексе STARK ES метода подконструкций и мультифронтального метода для решения систем линейных уравнений, а также метода итерирования подпространства и блочного метода Ланцоша со сдвигами для решения задач на собственные значения. Приведены данные по эффективности применения рассматриваемых методов в программном комплексе STARK ES на примерах моделей реальных строительных объектов.*

**Метод конечных элементов, метод подконструкций, мультифронтальный метод, метод итерирования подпространства, метод Ланцоша.**

### **Введение**

В настоящее время в России развернута работа по реализации крупномасштабных строительных проектов. К их числу относится, например, строительство комплекса «Москва-Сити», высотных зданий в Москве, Санкт-Петербурге, Сочи, Новороссийске и других крупных городах, а также уникальных спортивных сооружений (олимпийские объекты в Сочи, новый футбольный стадион на Крестовском острове в Санкт-Петербурге и др.). Вместе с тем за последние годы произошел ряд аварий и катастроф с разрушением строительных объектов, например аквапарка и Басманного рынка в Москве, машинного зала Саяно-Шушенской ГЭС и др. Это обусловило ужесточение требований к расчетным моделям сооружений и точности их реализации численными методами.

При проведении научно-исследовательских и проектных работ возникла необходимость существенного развития вычислительных средств и информационных технологий для обеспечения надежности и экономичности строительства и эксплуатации указанных объектов. При этом предъявляются все большие требования к детальности конечно-элементных моделей сооружений, и, следовательно, растет размерность моделей, что делает невозможным их анализ без применения специализированных алгоритмов. Актуальной проблемой является также достижение высокой скорости решения задач.

Проектирование многих крупных строительных объектов в России выполняется проектно-строительными фирмами Европы, США и других стран. Эти фирмы имеют соответствующий опыт, в том числе в применении программных продуктов и вычислительных систем большой мощности. К сожалению, в России разработки CAE- и CAD-систем для автоматизации инженерных расчетов и конструирования в строительстве не финансируются, разработка программного обеспечения ведется небольшими фирмами за счет средств, получаемых в основном от другой коммерческой деятельности. В дальнейшем отсутствие отечественных исследований и разработок в данном направлении приведет к тотальному господству в инженерной практике западных программных продуктов и технологий, как это уже произошло в ряде отраслей.

Разработка отечественного САЕ-продукта, в том числе для мощных ЭВМ с параллельной архитектурой, соответствует современным тенденциям развития автоматизации исследований и проектирования в строительстве. При этом могут быть более полно реализованы перспективные отечественные подходы к расчету строительных конструкций с использованием единых трехмерных моделей всех несущих конструкций сооружения и основания, учитывающих пространственный характер воздействий, физическую и геометрическую нелинейность, технологию и последовательность возведения конструкций и другие важные факторы.

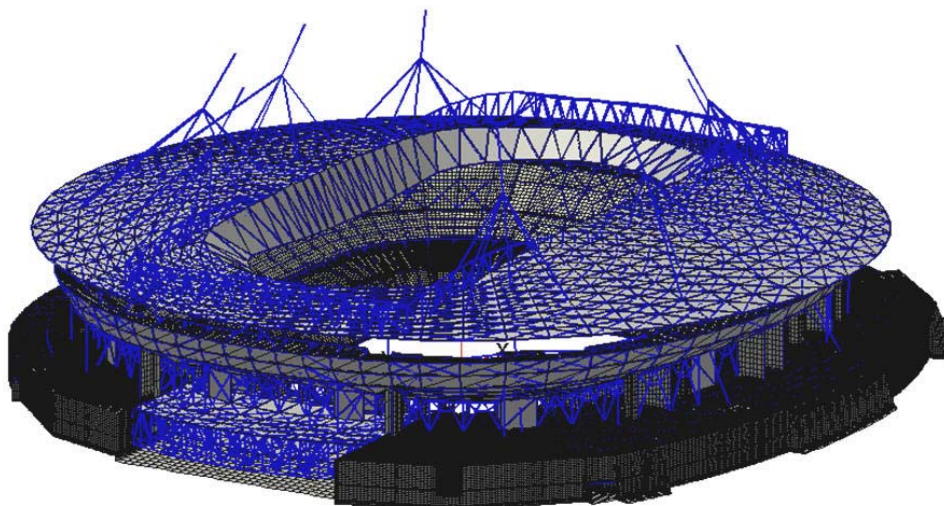
В качестве базы для внедрения высокоэффективных алгоритмов использован программный комплекс STARK ES, разработанный в ООО «ЕВРОСОФТ» (Москва, Россия) и предназначенный для расчета пространственных строительных конструкций на прочность, устойчивость и колебания [3, 5].

### **Метод подконструкций**

Одним из эффективных способов решения большеразмерных задач строительной механики на основе метода конечных элементов (МКЭ) является технология подконструкций [1, 2, 4]. При применении этого метода требования к оперативной памяти существенно уменьшаются, так как нет необходимости создавать и хранить в оперативной памяти компьютера полную матрицу жесткости для всей модели. Кроме того, данные по подконструкциям независимы, что позволяет эффективно распараллелить задачу и существенно сократить время ее решения. Это особенно важно при решении нелинейных задач [7]. Дополнительно при небольшой модификации метода можно получить существенные организационные выгоды, такие как возможность выделения однотипных «суперэлементов», разделение конструкции на линейную и нелинейную или на постоянную и моделируемую части и т.п.

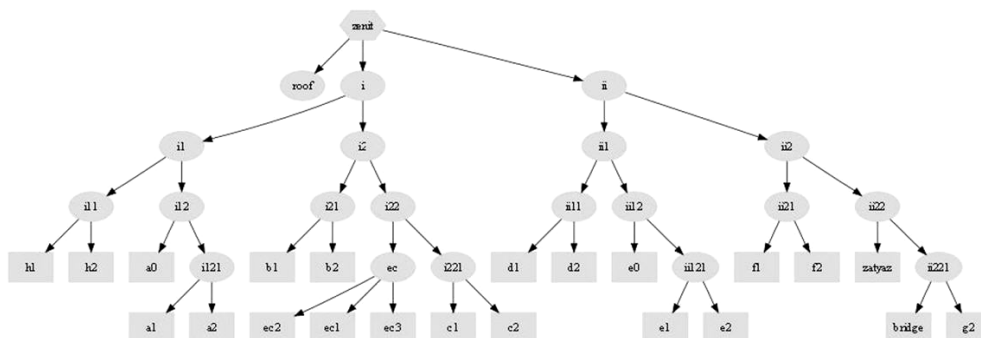
В STARK ES метод подконструкций реализован еще в 1990-х гг. и широко используется в практике строительного проектирования.

Рассмотрим решение задачи статического расчета методом подконструкций для модели стадиона в Санкт-Петербурге, содержащей свыше 2.5 млн степеней свободы (рис. 1).



**Рис. 1.** Конечно-элементная модель стадиона

При решении данной задачи была построена древовидная структура подконструкций, в которой одни подконструкции состояли из других, что дало возможность не решать систему уравнений сразу относительно всех внешних переменных, а находить их постепенно. Таким образом, модель стадиона была разбита на 43 подконструкции, дерево исключения для которых показано на рис. 2. Латинскими буквами обозначены названия подконструкций, часть из которых показаны на нижеприведенном рис. 3.



**Рис. 2.** Дерево исключения

На этом примере установлено, что требования к оперативной памяти существенно уменьшаются. Если для матрицы жесткости всей конструкции необходимо 5664 Мб оперативной памяти, то для нахождения в памяти одной самой большой подконструкции достаточно 727 Мб, что существенно увеличивает порядок решаемой задачи.

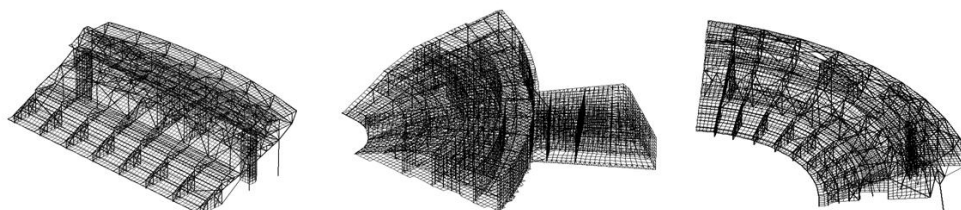
### **Фронтальные методы**

Другим способом, позволяющим решать системы уравнений МКЭ большой размерности, может служить фронтальный метод исключения неизвестных [6, 8].

Фронтальный метод позволяет произвести факторизацию матрицы жесткости путем сборки и исключения уравнений только для ее части. Элементы матрицы жесткости могут быть получены заранее и записаны на диск или создаваться во время решения. Часть неизвестных, которая участвует в исключении на каждом шаге, называется фронтом и образует фронтальную матрицу. Для получения решения требуется нахождение в оперативной памяти только фронтальной матрицы, так как после исключения части уравнений вычисленные элементы факторизованной матрицы жесткости не изменяются и могут быть сохранены на диск. При одновременной обработке нескольких независимых фронтов метод называется мультифронтальным и может быть распараллелен.

Таким образом, фронтальный метод, так же как и метод подконструкций, не требует хранения в памяти полной матрицы жесткости для всей модели и может эффективно использоваться для организации параллельных вычислений.

В настоящее время данный метод реализован в ПК STARK ES 2011 2RUN для применения на персональных ЭВМ.



**Рис. 3.** Вид отдельных подконструкций: слева — трибуны верхнего уровня, секция «А», в центре — трибуны нижнего уровня, секция «В», справа — трибуны верхнего уровня, секция «Н»

Приведем сопоставительные данные по производительности двух рассматриваемых методов решения систем линейных уравнений в STARK ES. Для анализа отобран ряд конечно-элементных моделей проектируемых строительных объектов из практики ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Основные характеристики расчетных моделей сооружений представлены в табл. 1, а на рис. 1 и 4 приведен общий вид некоторых из них.

Таблица 1

**Описание моделей строительных конструкций**

№ п/п	Объект	Кол-во узлов	Кол-во конечных элементов	Кол-во степеней свободы	Плотность матрицы жесткости, %
1	Оболочка покрытия 2-й сцены Мариинского театра, С.-Петербург	22 733	6 670	40 020	0.261
2	Спортивно-досуговый центр	15 801	14 797	88 782	0.251
3	Нефтедобывающая платформа	28 623	17 312	98 650	0.249
4	Горнолыжный спуск «Воробьевы Горы», Москва	34 822	18 760	112 560	0.166
5	Высотное здание комплекса «Новосити», Новороссийск	33 612	32 626	195 024	0.139
6	22-эт. здание по ул. Параллельная, Сочи	41 257	48 267	247 542	0.149
7	Жилой комплекс «Королевский парк», Сочи	62 408	42 762	256 572	0.222
8	Высотное здание «Москва-Сити», $H = 380$ м	125 932	178 059	755 592	0.048
9	Стадион «Газпром-Арена», С.-Петербург, модель I	230 386	159 686	798 230	0.026
10	Большая ледовая арена, Сочи	172 285	148 315	889 890	0.047
11	Высотное здание 1	270 695	284 000	1 623 600	0.014
12	Стадион «Газпром-Арена», С.-Петербург, модель II (рис. 1)	426 071	577 500	2 534 446	0.012
13	Высотное здание 2	541 295	568 000	3 247 200	0.006
14	Высотное здание 3	811 895	852 000	4 870 800	0.004
15	Высотное здание 4	1 339 015	1 403 570	8 033 520	0.003

В представленной выборке примеров присутствуют разнообразные по своим свойствам модели сооружений различной архитектурной формы с числом неизвестных узловых перемещений от 40 тыс. до 8 млн.

В табл. 2 приведены данные о времени решения задач линейного статического расчета рассматриваемых моделей двумя методами. Данные получены с использованием только одного вычислительного ядра процессора.

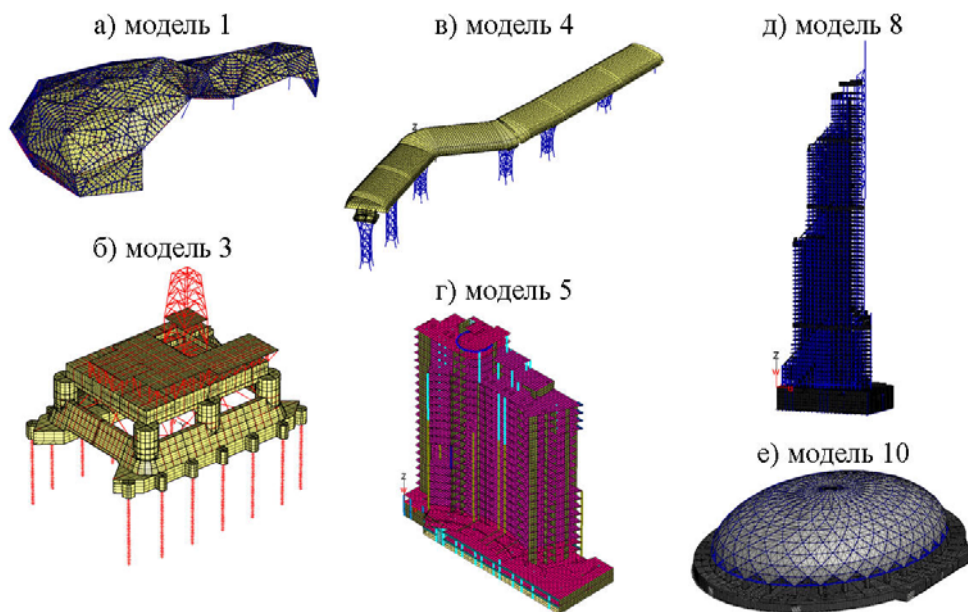


Рис. 4. Общий вид конечно-элементных моделей сооружений

Таблица 2

Время решения задач линейной статики (Intel Core 2 Duo E6400, 2133 МГц, 2048 Мб RAM, ОС MS Windows XP)

Номер модели	Кол-во нагрузений	Время расчета, мин		$t_s/t_f$
		с использованием метода подконструкций (STARK ES 2010), $t_s$	с использованием фронтального метода (STARK ES 2011), $t_f$	
1	13	0.73	0.22	3.3
2	13	0.85	0.7	1.2
3	28	1.35	0.7	1.9
4	1	1.07	0.5	2.1
5	35	7.77	1.87	4.2
6	28	7.55	3.32	2.3
7	4	10.98	5.9	1.9
8	15	24.88	10.73	2.3
9	32	14.0	7.78	1.8
10	25	42.76	18.7	2.3
11	2	12.42	10.32	1.2
12	32	63.33	44.78	1.4
13	2	—	23.55	—
14	2	—	43.43	—
15	2	—	54.85	—

Данные из табл. 2 показывают, что фронтальный метод обеспечивает скорость решения задач линейной статики строительных конструкций в среднем в 2.1 раза выше, чем метод подконструкций, и позволяет решать задачи большей размерности.

### Решение задач на собственные значения

При численном исследовании работы сооружений при динамических воздействиях используется расчет конструкций на собственные колебания. Он сводится к нахождению собственных значений и векторов большемерных матриц. К задаче на собственные значения приводится и расчет конструкций на устойчивость.

Для анализа эффективности были выбраны два наиболее распространенных метода решения задач на собственные значения — метод итерирования подпространства и блочный метод Ланцоша со сдвигами [8]. Оба метода реализованы в ПК STARK ES 2011 2RUN. При этом алгоритм первого использован совместно с методом подконструкций, а второй — совместно с фронтальным методом исключения неизвестных.

В табл. 3 приведены данные о времени решения задачи собственных колебаний двумя методами для моделей из табл. 1. Во всех случаях расчет методом Ланцоша оказался быстрее по сравнению с методом итерирования подпространства (в среднем — в 26 раз), а для модели 1 выигрыш в скорости решения составил более 150 раз.

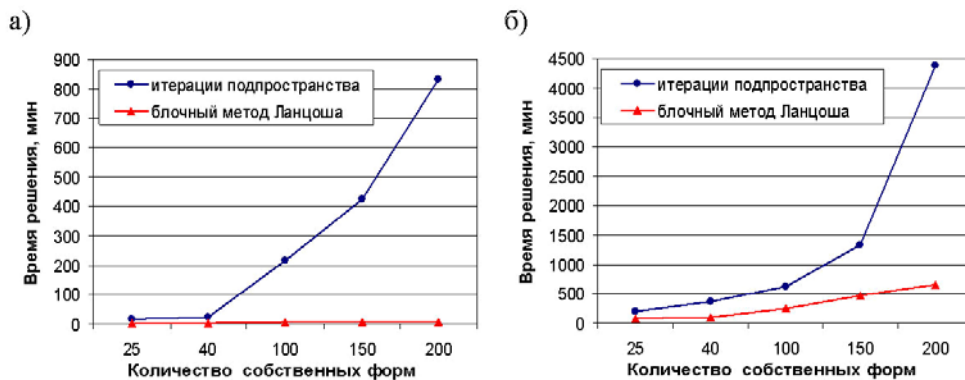
Кроме того, выполнен анализ скорости сходимости рассматриваемых методов при различном числе определяемых собственных значений на примере двух расчетных моделей. Полученные графики представлены на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что для метода итерирования подпространства при возрастании количества собственных форм значительно уменьшается скорость сходимости и увеличивается время решения задачи (в теории — экспоненциально), а для метода Ланцоша скорость остается практически постоянной.

Таблица 3

### Время решения проблемы собственных значений (Intel Core 2 Duo E6400, 2133 МГц, 2048 МБ RAM, ОС MS Windows XP)

Номер модели	Кол-во искомым собств. пар	Время расчета, мин		$t_P/t_L$
		методом итераций подпространств (STARK ES 2010), $t_P$	методом Ланцоша (STARK ES 2011), $t_L$	
1	200	463.0	3.0	154.3
2	200	285.2	10.9	26.2
3	25	16.9	2.8	6.0
	40	24.6	2.5	9.8
	100	214.2	5.5	38.9
	150	424.8	6.4	66.4
4	150	506.5	5.9	85.8
5	40	745.4	18.6	40.1
6	20	216.0	20.1	10.7
7	25	406.2	70.4	5.8
8	6	79.5	58.6	1.4
9	25	200.7	90.8	2.2
	40	375.2	94.8	4.0
	90	629.9	249.0	2.5
	200	4377.0	659.7	6.6
10	75	1344.2	946.7	1.4
11	10	83.5	50.0	1.7
12	10	725.2	648.3	1.1
13	10	—	266.2	—
14	6	—	938.9	—



**Рис. 5.** Скорость решения задачи на собственные значения:  
а) для модели 3; б) для модели 9

Следует заметить, что увеличение скорости решения задачи достигнуто благодаря не только собственно методу Ланцоша, но и более эффективному алгоритму факторизации матриц высокого порядка на основе мультифронтального метода, реализованному в сочетании с методом Ланцоша (это видно из табл. 2). Метод же итерирования подпространства при расчетных схемах относительно большой размерности использован только в сочетании с методом подконструкций.

### Заключение

Представляется целесообразным продолжить развитие отечественных разработок по реализации эффективных численных методов решения больших задач строительной механики на персональных и высокопроизводительных ЭВМ.

В программном комплексе STARK ES 2011 наиболее эффективными оказались мультифронтальный метод для решения систем линейных алгебраических уравнений и блочный метод Ланцоша со сдвигами для решения задач на собственные значения. Эти методы позволили увеличить размерность решаемых на ПЭВМ задач до 8 млн неизвестных, а также существенно увеличить скорость решения задач по сравнению с другими используемыми в программе методами.

Перспективно применение итерационных методов [6, 8] наряду с прямыми методами решения систем линейных уравнений, а также более широкое использование возможностей высокопроизводительных вычислительных систем, имеющих распределенную многопроцессорную архитектуру.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Потапенко А.Л. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // Строит. механика и расчет сооружений. 2006. № 6. С. 45–52.
2. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. М.: АСВ, 2009. 360 с.
3. Жук Ю.Н., Симбиркин В.Н. Программный комплекс STARK ES // Современное высотное строительство. М.: ИТЦ Москомархитектуры, 2007. 464 с.

4. Жук Ю.Н., Симбиркин В.Н., Филимонов А.В., Якушев В.Л. Применение метода подконструкций для решения больших задач методом конечных элементов // С.-Петерб. науч. форум «Наука и общество», С.-Петербург, 21–25 сентября 2009 г. Информ. технологии: Тез. докл. СПб., 2009. С. 255–259.

5. Симбиркин В.Н., Фросин А.В. Развитие и взаимодействие компонентов автоматизированной системы инженерного анализа СТАРКОН для массового применения в строительстве // Строит. механика и расчет сооружений. 2010. № 5. С. 67–71.

6. Фиалко С.Ю. Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечно-элементных задач строительной механики // Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. К.: Сталь, 2002. С. 552–569.

7. Якушев В.Л. Устойчивость тонкостенных конструкций с учетом начальных несовершенств // Строит. механика. 2010. № 1. С. 43–46.

8. Bathe K.-J. Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037 p.

V.L. Yakushev, Yu.N. Zhuk, V.N. Simbirkin, A.V. Filimonov

**IMPLEMENTATION OF CALCULATION METHODS FOR MAJOR TASKS  
IN STRUCTURAL MECHANICS USING STARK ES SOFTWARE**

*The article presents experience of implementing and using method of subconstructions and multifrontal method for solving systems of linear equations, as well as method of subspace iteration and block Lanczos algorithm with shifts for solution of eigenvalue problems using STARK ES software. The authors quote data on efficiency of using these methods in STARK ES software, illustrated by models of real building objects.*

**Finite element method, method of subconstructions, multifrontal method, subspace iteration method, Lanczos algorithm.**