Переводы

Robert Brice

Lincoln Laboratory

Massachusetts Institute of Technology

Cambridge, Massachusetts. 1955.

Об энтропийной эквивалентности во временной и частотной областях*

Шеннон [1, 2] обнаружил два различных выражения для энтропии дискретного стационарного гауссова временного ряда во временной и частотной областях соответственно. Интересно отметить, что, сравнивая эти два результата, получается отношение, которое используется при оценке определителей высокого порядка. Это отношение было впервые обнаружено Szegö [3] и было выведено независимо от него Whittle [4, 5], который использовал другой метод. Отсюда мы имеем пример неясно выраженной идентичности, которая может быть объяснена эвристически информационно-теоретическим доводом. Результат Колмогорова [6] и Винера [7] по экстраполяции дискретного стационарного временного ряда может быть представлен как естественная последовательность энтропийных оценок.

Используя выражение Шеннона для энтропии n-мерного гауссова распределения, мы имеем для энтропии на единицу или на степень свободы (H) дискретного временного ряда $\ldots x_{-1}, x_0, x_1 \ldots$,

$$H = \lim_{n\to\infty} 1/n \log \left[(2\pi e)^{n/2} |a_{ij}^{(n)}|^{1/2}\right], \quad (1)$$

где $|a_{ij}^{(n)}|$ — это определитель, элементы которого есть a_{ij}:

$$a_{ij} = \overline{x_i x_j} = \phi(|i-j|);\ i, j = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

Elias дает выражение, подобное (1):

$$H = \lim_{n\to\infty} 1/n \log \left[(2pe)|a_{ij}^{(n)}|/|a_{ij}^{(n-1)}|\right]. \quad (3)$$

Пусть

$$F(f) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e_k \cos 2\pi f k; \quad 0 \le f \le 1, \\ e_k = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 2; & k \ne 0 \end{cases} \\ 0; \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Тогда

$$\phi(k) = \int_0^1 F(f) \cos 2\pi f k \, df. \quad (5)$$

Применяя выражение Шеннона для энтропии на степень свободы гауссова процесса с ограниченным спектром, мы находим

$$H = ½ \int_0^1 \log \left[2\pi e\, F(f)\right] df. \quad (6)$$

Приравнивая (1), (6), получаем

$$\lim_{n\to\infty} |a_{ij}^{(n)}| = \exp \left\{ n \int_0^1 \log F(f)\, df \right\}, \quad (7)$$

выражение Szegö и Whittle.

Они также получили результат, приравнивая (3) и (6),

$$\lim_{n\to\infty} [|a_{ij}^{(n)}| / |a_{ij}^{(n-1)}|] = \exp \left\{ \int_0^1 \log F(f)\, df \right\}, \qquad (8)$$

предел, выведенный еще Поля в 1915 году.

Наконец, используя выражение Elias [8], мы можем применить теорию предсказания Колмогорова — Винера для определения энтропии члена временного ряда, когда известны все предыдущие члены.

Для гауссовых процессов эта энтропия определена в (3), но также и в

$$H = \tfrac{1}{2} \log 2\pi e \sigma^2, \qquad (9)$$

где s^2 — это дисперсия минимальной ошибки метода Колмогорова — Винера. Эта дисперсия, как обнаружено Колмогоровым и Винером, будет:

$$\sigma^2 = \exp \left\{ \int_0^1 \log F(f)\, df \right\}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9) мы получим (6). Отсюда выражение (10) может быть понято интуитивно. Далее мы имеем простую демонстрацию на информационно-теоретическом уровне хорошо известного результата, что линейное предсказание является оптимальным для гауссова временного ряда.

Перевод Рыбинской А. А.

Под редакцией Цибульского В. Р.

Литература

1. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communication. Bell. Sys. Tech. Jour., vol. 27, pp. 379 and 623; October, 1948.

2. Ibid., section 22.

3. Szegö *G.* Beiträge zur Theorie der Toeplitzchen Formeln» Math. Zeit., vol. 6. p. 167; 1920, and vol. 9, p. 167; 1921.

4. *Whittle P.* Hypothesis Testing in Time Series Analysis. Almquist & Wiksells A B, Uppsala, Sweden; 1951.

5. *Whittle P.* Some results in time series analysis. Sheniinavisk Aktuarietidskrifi, vol. 1, p. 48; 1952.

6. *Kolmogoroff A. H.* Sur l’interpolation et extrapolation des suites stationnaires. Compt. Rend. (Paris), vol. 208, p. 2043; 1939. See also Bull. Acad. Sci. (URSS), vol. 5, p. 3; 1941.

7. *Wiener N.* The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Allpication. Technology Press; 1949.

8. *Elias P.* A note on autocorrelation and entropy. Proc. I.R.E., vol. 39, p. 839; July, 1951.

---

* *R. Brice.* On Entropy Equivalence in the Time- and Frequiney-Domains. Proceedings of the JRE. PP. 484–485; April, 1955.