Ю. Л. Соловьев

Энтропийные методы оценки устойчивости

Использование системного подхода позволяет определить устойчивость систем различных классов. При оценке существования систем мы сталкиваемся со сложным взаимодействием и самоорганизацией естественных и социальных систем и их компонентов. Одним из вариантов применения законов термодинамики и теории информации к оценке устойчивости развития систем является критерий минимального производства энтропии, которую можно вычислить по временному ряду данных.

В последние годы термин «неустойчивость» стал общепринятым для обозначения нарастающего кризиса развития человечества. Конференция по окружающей среде и развитию, которая состоялась в 1992 году в Рио-де-Жанейро, констатировала тупиковый характер прогресса, ориентированного на нарастающее потребление заведомо ограниченных природных ресурсов по принципу «здесь, сейчас и как можно больше».

Однако в настоящее время все больше и больше используется такое понятие, как «устойчивое развитие», которое связывают с новой концепцией человеческой цивилизации. Формируемая стратегия устойчивого развития должна обеспечить цивилизованный переход человечества к управляемому, гармоничному и стабильному состоянию. Сложность такого перехода в значительной степени определяется противоречием, возникающим между стремлением большинства людей удовлетворять постоянно возрастающие потребности и требованием их ограничения для обеспечения возможности существования следующих поколений.

Современная наука обладает огромным багажом знаний макросистем и процессов, протекающих в них. Задача определения устойчивости таких макросистем, как город, регион, область, государство, не может решаться в рамках анализа одной лишь макросистемы. Каждая такая система состоит из большого количества подсистем, которые не только развиваются как самостоятельные системы, но и тесно взаимодействуют между собой.

При рассмотрении состояния и поведения макросистем следует обратить внимание на такое фундаментальное понятие, как энтропия.

Энтропия (от греч. *entropía* — поворот, превращение) — понятие, применяемое в термодинамике для определения меры необратимого рассеяния энергии [4]. Это понятие было введено Р. Клаузиусом (1865), который показал, что процесс превращения теплоты в работу следует общей физической закономерности — второму началу термодинамики. Его можно сформулировать строго математически, если ввести особую функцию состояния — энтропию.

Так, для термодинамической системы, совершающей квазистатически (бесконечно медленно) циклический процесс, в котором система последовательно получает малые количества теплоты dQ при соответствующих значениях абсолютной температуры T, интеграл от «приведенного» количества теплоты dQ/T по всему циклу равен нулю [1, 9]:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$ — равенство Клаузиуса. (1)

Это равенство, эквивалентное второму началу термодинамики для равновесных процессов, Клаузиус получил, рассматривая произвольный циклический процесс как сумму очень большого, в пределе бесконечного, числа обратимых элементарных циклов Карно. Математически равенство Клаузиуса необходимо и достаточно для того, чтобы выражение

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad (2)$$

представляло собой полный дифференциал функции состояния S, названное энтропией (дифференциальное определение энтропии) [1, 9]. Разность энтропий системы в двух произвольных состояниях A и B (заданных, например, значениями температур и объемов) равна [1]:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \qquad (3)$$

(интегральное определение энтропии). Интегрирование здесь ведется вдоль пути любого квазистатического процесса, связывающего состояния A и B, при этом, согласно равенству Клаузиуса, приращение [6, 9]

$$dS = S_B - S_A \qquad (4)$$

не зависит от пути интегрирования.

Клаузиусом также впервые была показана важность понятия энтропии для анализа необратимых (неравновесных) процессов. Для необратимых процессов интеграл от приведенной теплоты dQ/T по замкнутому пути всегда отрицателен [1, 9]:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$ — неравенство Клаузиуса. (5)

Это неравенство — следствие теоремы Карно: КПД частично или полностью необратимого циклического процесса всегда меньше, чем КПД обратимого цикла. Из неравенства Клаузиуса вытекает неравенство (3), поэтому энтропия адиабатически изолированной системы при необратимых процессах может только возрастать.

Таким образом, энтропия определяет характер процессов в адиабатической системе: возможны только такие процессы, при которых энтропия либо остается неизменной (обратимые процессы), либо возрастает (необратимые процессы). При этом не обязательно, чтобы возрастала энтропия каждого из тел, участвующего в процессе. Увеличивается общая, суммарная энтропия тел, в которых процесс вызвал изменения [9, 10].

Понятие «энтропия» применимо и к термодинамически неравновесным состояниям, если отклонения от термодинамического равновесия невелики и можно ввести представление о локальном термодинамическом равновесии в малых, но еще макроскопических объемах. Такие состояния можно охарактеризовать термодинамическими параметрами (температурой, давлением и т. д.), слабо зависящими от пространственных координат и времени, а энтропию термодинамически неравновесного состояния определить как энтропию равновесного состояния, характеризующегося теми же значениями параметров. В целом энтропия неравновесной системы равна сумме энтропий ее частей, находящихся в локальном равновесии.

Статистическая физика связывает энтропию с вероятностью осуществления данного макроскопического состояния системы. Энтропия определяется через логарифм статистического веса W данного равновесного состояния [10]:

$$S = k \ln W(E, N), \qquad (6)$$

где k — постоянная Больцмана; $W(E, N)$ — число квантовомеханических уровней в узком интервале энергии dE вблизи значения энергии E системы из N частиц. Впервые связь энтропии с вероятностью состояния системы была установлена Л. Больцманом (1872 г.): возрастание энтропии системы обусловлено ее переходом из менее вероятного состояния в более вероятное. То есть эволюция замкнутой системы осуществляется в направлении наиболее вероятного распределения энергии по отдельным подсистемам.

В отличие от термодинамики статистическая физика рассматривает особый класс процессов — флуктуации (от лат. *fluctuatio* — колебание), случайные отклонения наблюдаемых физических величин от их средних значений, при которых система переходит из более вероятного состояния в менее вероятное, и ее энтропия уменьшается. Флуктуации происходят у любых величин, зависящих от случайных факторов и описываемых методами статистики. Наличие флуктуаций показывает, что закон возрастания энтропии выполняется только в среднем для достаточно большого промежутка времени [10].

Энтропия в статистической физике тесно связана с информационной энтропией, которая служит мерой неопределенности сообщений данного источника (сообщения описываются множеством величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые могут быть, например, словами какого-либо языка, и соответствующих вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$ появления величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в сообщении). Для определенного (дискретного) статистического распределения вероятностей p_k информационной энтропии называют величину [3]:

$$H_u = -\sum_{k-1}^{k} p_k \ln p_k \qquad (7)$$

при условии

$$\sum_{k-1}^{n} p_k = 1 . \qquad (8)$$

Значение H_u равно нулю, если какое-либо из p_k равно 1, а остальные — нулю, т. е. неопределенность в информации отсутствует. Энтропия принимает наибольшее значение, когда p_k равны между собой и неопределенность в информации максимальна. Информационная энтропия, как и термодинамическая, обладает свойством аддитивности (т. е. энтропия нескольких сообщений равна сумме энтропий отдельных сообщений). Здесь нельзя не отметить одну из основных теорем теории информации — теорему Шеннона [3, 7]. Суть ее сводится к следующему: при условии передачи последовательности символов, появляющихся с определенными вероятностями, имеется некоторая вероятность того, что передаваемый символ в процессе передачи будет искажен. Самый простой способ, позволяющий надежно восстановить исходную последовательность по получаемой последовательности, состоит в том, чтобы каждый передаваемый символ повторять *N* раз. Однако это приведет к уменьшению скорости передачи в *N* раз, т. е. сделает ее близкой к нулю. Теорема Шеннона утверждает, что можно указать такое, зависящее только от рассматриваемых вероятностей положительное число *v*, что при сколько угодно малом *e* > 0 существуют способы передачи со скоростью *v*′ (*v*′ < *v*), сколь угодно близкой к *v*, дающие возможность восстанавливать исходную последовательность с вероятностью ошибки, меньшей *e*. В то же время при скорости передачи *v*′, большей *v*, это уже невозможно. Упомянутые способы передачи используют надлежащие «помехоустойчивые» коды. Критическая скорость *v* определяется из соотношения [3]:

$$Hv = C, \qquad (9)$$

где *H* — энтропия источника на символ; *C* — емкость канала в двоичных единицах в секунду. Таким образом Шеннон показал, что энтропия источника информации определяет критическое значение скорости «помехоустойчивой» передачи информации по конкретному каналу связи.

Понятие энтропии, как показал впервые Э. Шрёдингер (1944), существенно и для понимания явлений жизни. Живой организм с точки зрения протекающих в нем физико-химических процессов можно рассматривать как сложную открытую систему, находящуюся в неравновесном, но стационарном состоянии. Для организмов характерна сбалансированность процессов, ведущих к росту энтропии, и процессов обмена, уменьшающих ее. Однако жизнь не сводится к простой совокупности физико-химических процессов, ей свойственны сложные процессы саморегулирования.

Термодинамика неравновесных процессов позволяет более детально, чем классическая термодинамика, исследовать процесс возрастания энтропии и вычислить количество энтропии, образующейся в единице объема в единицу времени вследствие отклонения системы от термодинамического равновесия — производство энтропии [5].

Производством энтропии называется энтропия, возникающая в физической системе за единицу времени в результате протекающих в ней неравновесных процессов. Существует также понятие локального производства энтропии, т. е. производство энтропии, отнесенное к единице объема [1].

Если учесть, что некие термодинамические силы X_i (например, градиенты температуры, концентраций компонентов или их химических потенциалов и
т. д.) создают в системе сопряженные им потоки J_i (теплоты, вещества, импульса и др.), то локальное производство энтропии такой неравновесной системе равно [1]:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} X_i J_i > 0, \qquad (10)$$

где *m* — число действующих термодинамических сил. Полное производство энтропии — это интеграл от энтропии по объему системы. Если термодинамические потоки и силы постоянны в пространстве, то полное производство энтропии отличается от локального лишь множителем, равным объему системы. Потоки J_i связаны с вызывающими их термодинамическими силами X_i линейными соотношениями [1, 5]:

$$J_i = \sum_{k=1}^{m} L_{ik} X_k, \qquad (11)$$

где L_{ik} — кинетические коэффициенты, которые определяют вклад различных термодинамических сил X_k в создание потока J_i (теорема Онзагера).

Согласно теореме Онзагера, если нет магнитного поля и вращения системы как целого, то [11]:

$$L_{ik} = L_{ki}. \qquad (12)$$

В том же случае, когда на систему действует внешнее магнитное поле *H* или система вращается с угловой скоростью *w*,

$L_{ik}(H) = L_{ki}(-H)$, $L_{ik}(w) = L_{ki}(-w)$ — принцип взаимности Онзагера. (13)

Исходя из соотношений взаимности Онзагера и из классического физикохимического принципа термодинамики, что энтропия — это мера беспорядочности систем, известный бельгийский химик И. Пригожин разработал новую теорию диссипативных (т. е. переходящих в другое состояние) структур. Им был установлен закон того, что окружающая нас природа представляет не что иное, как диссипативные и недиссипативные биологические структуры.

Для обоснования этой теории в 1947 году Пригожин доказал теорему о неравновесных процессах, исходя из которой установившемуся состоянию процесса соответствует минимальное производство энтропии (критерий минимума производства энтропии) [11]. Он показал, что если на систему наложены внешние условия, которые не дают системе достичь термодинамического равновесия, то энтропия системы увеличивается, а если такие внешние условия отсутствуют, то энтропия достигает абсолютного минимума. Данные процессы Пригожин формализовал следующим образом. Производство энтропии неравновесной системы, описанной n независимыми силами X_1, X_2, …, X_n, равна [11, 12]:

$$\sigma = \sum_{ik} X_i L_{ik} X_k, \qquad (14)$$

где L_{ik} — кинетические коэффициенты (см. выше).

Если X_i постоянны, то при $\partial\sigma/\partial X_i = 0$ $(i = n)$ производство энтропии $\sigma \to 0$ и общий поток энтропии тоже будет равен абсолютному минимуму:

$$J_i = \Sigma L_{ik} X_k = 0. \qquad (15)$$

Полная энтропия для общего случая неравновесной системы, когда i-е силы и i-потоки энтропии зависят от вполне определенного условия (точки x), будет выглядеть как:

$$P = \int \sigma(x) dV = \Sigma \int X_i(x) L_{ik} X_k(x) dV, \qquad (16)$$

где V — объем неравновесной системы; $\sigma(x)$ — локальное производство энтропии [12].

Проанализировав формулу (16) с точки зрения информациологического подхода, можно отметить, что функционал Пригожина отражает фундаментальную сущность природы, которой является вездесущая информация, т. е. $P \equiv I$, а $\sigma(x)$ можно интерпретировать квантами информации (информационалами), находящимися в том же объеме dV, что и энтропия [15].

Однако следует заметить, что критерий минимума производства энтропии справедлив лишь для систем с очень маленьким отклонением от состояния равновесия (т. е. если кинетические коэффициенты в соотношениях Онзагера постоянны). При больших отклонениях характер производства энтропии может существенно отличаться от вышеупомянутого принципа [11].

В современной термодинамике второе начало термодинамики формулируется единым и самым общим образом как закон возрастания энтропии [1, 5]. Согласно этому закону, в замкнутой системе энтропия S при любом реальном процессе либо возрастает, либо остается неизменной. В состоянии равновесия энтропия замкнутой системы достигает максимума (критерий максимума производства энтропии) и никакие макроскопические процессы в такой системе, согласно второму началу термодинамики, невозможны. При постоянном объеме V и температуре T равновесию отвечает минимум свободной энергии F (гельмгольцевой энергии) [1]:

$$F = U - TS, \qquad (17)$$

где U — внутренняя энергия; S — энтропия; T — температура.

А при постоянном давлении p и температуре T — минимум термодинамического потенциала G (гиббсовой энергии):

$$G = H - TS, \qquad (18)$$

где H — энтальпия; S — энтропия; T — температура.

Однако определенным значениям внешних параметров (p, V, T и др.) может соответствовать несколько экстремумов (максимумов или минимумов) одной из перечисленных выше функций. Каждому из относительных минимумов функции F или G соответствует устойчивое по отношению к малым воздействиям или флуктуациям состояние. Такие состояния называют метастабильными [1, 5]. При небольшом отклонении от метастабильных состояний система возвращается в это же состояние, однако по отношению к большим отклонениям от равновесия она неустойчива и переходит в состояние с абсолютным минимумом термодинамического потенциала, которое устойчиво по отношению к конечным отклонениям значений физических параметров от равновесных. Таким образом, хотя метастабильные состояния в известных пределах устойчивы, рано или поздно система все же переходит в абсолютно устойчивое, стабильное состояние [5].

Для незамкнутой системы направление возможных процессов, а также условия равновесия могут быть получены из закона возрастания энтропии, примененного к составной замкнутой системе.

Например, построение прогнозных моделей для социально-экономи-ческих объектов затрудняется ограниченным объемом информации и отсутствием полных сведений о законах распределения параметров [7]. Это, в свою очередь, делает невозможным применение традиционных методов анализа и оценки таких моделей. В этом случае для анализа социальных и экономических макросистем предлагается использовать эмпирическую функцию распределения и принцип максимума неопределенности (т. е. принцип максимального производства энтропии). Данный метод реализован на основе информационной энтропии Шеннона

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k \quad , \qquad (19)$$

и таком понятии, как энтропийная метрика

$$h = H^{T}(\theta) - H^{Э}(\hat{\theta}), \qquad (20)$$

которая является разностью теоретической и эмпирической энтропий [7].

Подобный подход используется, например, и для моделирования функционально-пространственной городской системы, которая представляет собой сложную макросистему с большим количеством подсистем. Анализ подобного рода макросистем предлагается вести с помощью «принципа максимизации энтропии» [13]. Суть этого принципа заключается в следующем.

Состояние сложной иерархической макросистемы является величиной случайной, и его можно охарактеризовать функцией распределения вероятностей $P\{N_1 \ldots. N_m\}$. Для описания вероятностных свойств макросистемы с таким распределением вводится понятие энтропии $S = c\ln P$, которая имеет «острый максимум». В этом случае макросостояние, реализуемое в данной системе, соответствует максимуму энтропии.

На основе этого принципа формируется вероятностная структура модели городской системы, состоящей из множества подсистем [13].

Рассматривая динамику макросистем, следует учитывать тот факт, что любая макросистема (термодинамическая, экономическая, социальная, экологическая и т. д.) имеет сложную структуру. Поэтому, для того чтобы научиться распознавать устойчивость или неустойчивость какой-либо макросистемы, а также внешние возмущающие воздействия, которые ведут к нарушению устойчивого баланса, необходимо собрать как можно больше информации о данной системе. Для этого нужно обеспечить каждую макросистему необходимым количеством показателей.

За последние годы учеными было создано большое количество моделей различных макросистем, а с появлением высокоскоростных и высокоточных компьютеров математическое моделирование сделало значительный шаг вперед.

В качестве наиболее интересного, на мой взгляд, примера можно привести «звезду ориентиров», предложенную Хартмутом Босселем. Суть этой модели заключается в следующем.

Для оценки устойчивости системы Х. Боссель вводит такое понятие, как «жизнеспособность» системы [2]. Чтобы сохранить свою жизнеспособность, система должна адекватно реагировать на угрозы в ее адрес. При этом время длительности реагирования системы должно быть меньше, чем время распространения угрозы.

Учитывая свойства окружения системы, а также ее внутренние свойства, вводится еще одно понятие — базовые ориентиры. В совокупности базовые ориентиры дают полное представление о жизнеспособности системы [2]:

- *СУЩЕСТВОВАНИЕ*. Превышает ли скорость, с которой можно избежать опасности существованию, скорость приближения угрозы? Пример: Опережают ли темпы увеличения производства зерна темпы повышения спроса на зерно со стороны растущего населения?
- *ЭФФЕКТИВНОСТЬ*. Превышает ли скорость повышения эффективности рационального использования ресурсов (материалов, энергии, информации) скорость истощения наличных ресурсов? Пример: Способны ли темпы сокращения водопользования, за счет внедрения прогрессивных ирригационных технологий, компенсировать скорость истощения грунтовых вод?
- *СВОБОДА ДЕЙСТВИЙ.* Превышает ли скорость расширения спектра возможного реагирования (разнообразие системы) скорость появления новых требований (разнообразие окружения)? Пример: Насколько своевременным является внедрение новых концепций в содержание учебных планов, чтобы последние могли конкурировать с темпами появления новых разнообразных явлений в области общественного и технологического развития?
- *БЕЗОПАСНОСТЬ*. Превышает ли скорость внедрения мер безопасности скорость увеличения угрозы? Пример: Опережают ли темпы возведения плотин скорость повышения уровня паводковых вод?
- *АДАПТИРУЕМОСТЬ.* Способна ли скорость структурных изменений внутри системы соперничать со скоростью наступления необратимых изменений в составе окружения? Пример: Способны ли темпы создания новых рабочих мест в новых отраслях промышленности соперничать с темпами безработицы, вызванной повышением производительности труда?
- *СОСУЩЕСТВОВАНИЕ*. Способны ли темпы изменений в сфере общественного взаимодействия и коммуникации справиться с темпами появления новых деятелей? Пример: Способны ли существующие в обществе взгляды и предубеждения к достаточно быстрому

изменению, чтобы адаптироваться к темпам притока иммигрантов из других стран?

· *ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ПОТРЕБНОСТИ*. Остается ли скорость проявления психологического стресса и напряженности ниже по сравнению со скоростью их переваривания? Пример: Наносят ли оскорбления, телесные наказания и несправедливость, причиняемые детям в конкретном обществе, постоянно действующий психологический урон?

Для количественной оценки устойчивости (или жизнеспособности системы) используется безразмерный показатель Бьесиота [2], который определяется как отношение двух конкретных скоростей изменения в заданном промежутке времени: скорости реагирования и скорости распространения угрозы (возмущения). Если обе скорости равны между собой, то показатель Бьесиота равен единице. Следовательно, значение, равное единице, служит критической отметкой: если скорость реагирования окажется выше скорости распространения угрозы, то система будет способна справиться с конкретной угрозой, если ниже, то жизнеспособности системы будет угрожать опасность.

Рис. Звезда ориентиров

Как показано на рис., если значение показателя Бьесиота хотя бы для одного из базовых ориентиров находится внутри круга единичного радиуса, то жизнеспособности всей системы угрожает опасность и система переходит в неустойчивое состояние [2].

Для оценки выбранных показателей предлагается использовать критерий минимума производства энтропии. В отличие от метода «звезды ориентиров», недостатком которого является то, что он дает представление только об устойчивости движения системы, а не об устойчивом развитии, критерий минимума производства энтропии, наиболее полно отражает устойчивость макросистемы [14].

Набор показателей для удовлетворения базовых ориентиров представляет собой не что иное, как временной ряд, т. е. статистический ряд, характеризующий изменение (развитие) каких-либо явлений во времени. Поэтому возникает вопрос о необходимости вычисления энтропии на основе временного ряда для того, чтобы оценить поведение любого из базовых ориентиров, а следовательно, определить жизнеспособность (или устойчивость) макросистемы в целом.

Для этого обратимся к анализу хаотических систем. В последние 15–20 лет ведется интенсивное изучение хаотических систем и процессов и развились два основных подхода к их идентификации и анализу. Первый подход достаточно традиционен и базируется на изучении поведения модели динамической системы достаточно простого объекта, которая представляется в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и может быть получена на основе представлений о физической природе процесса. Однако для реальных хаотических процессов чаще всего не представляется возможным найти адекватное описание с помощью системы дифференциальных уравнений. Второй подход к идентификации хаотических систем основан на наблюдении хаотических процессов и на построении аттрактора в так называемом реконструированном фазовом пространстве, которое восстанавливается из наблюдаемого временного ряда, представляющего собой последовательность дискретных значений какой-либо переменной, генерируемой системой. Аттрактор — множество, на которое выходит система при бесконечном росте времени. Выход на это решение происходит из целой области начальных условий: происходит «забывание» системой начальных условий [16].

Для вычисления такой характеристики аттрактора, как энтропия, необходимо иметь множество точек, определенных в фазовом пространстве размерности *n* и принадлежащих аттрактору. Число точек *M* в расчетах конечно, но обязано быть достаточно большим [16]:

$$M \geq M_{min} = 10^{2+0,4D}, \qquad (21)$$

где D — размерность аттрактора. В случае, когда динамическая система задана дискретным оператором отображения, точки находятся автоматически после задания начальных условий. Если динамическая система задана системой дифференциальных уравнений, то в общем случае решение может быть найдено только численным интегрированием системы на компьютере. Обычно используют метод Рунге-Кутта 4-го порядка, погрешность задают 10^{-4}–10^{-8}, шаг счета определяется конкретной системой и должен быть выбран в сравнении с наименьшим из ее характерных времен.

Однако часто требуется вычислить характеристики аттрактора некоторой реальной системы, математическая модель которой неизвестна. При этом, как правило, неизвестна и размерность ее фазового пространства. В этой ситуации мы располагаем информацией о поведении во времени какой-либо одной из динамических переменных. К тому же и интервал времени экспериментальной реализации естественно ограничен. Можно ли в таких условиях получить характеристики аттрактора?

Путь к решению этой проблемы был предложен Такенсом [17].

Восстановление аттрактора по временному ряду осуществляется следующим образом.

Пусть имеется временной ряд экспериментальных данных, представляющий собой отсчеты некоторой физической величины: $\{S_k\}_{k=0}^{M-1}$. Если известен шаг по времени Dt, то время $t = k^*\Delta t.$ Предполагается, что физическая величина S является одной из переменных динамической системы. Система находится в стационарном режиме, т. е. фазовая траектория проходит внутри аттрактора. Для восстановления аттрактора Такенсом предложен метод временной задержки координат. В n-мерном фазовом пространстве строится последовательность точек вида:

$$X_k = (S_k, S_{k+\tau}, \ldots, S_{k+(n-1)+\tau}), \tag{22}$$

$$k = 0, m-1,$$

$$m = M - (n-1)\tau, \tag{23}$$

здесь τ — временная задержка; n — размерность вложения.

Основной результат Такенса состоит в следующем. Если $M \to \infty$, то множество точек $x_k \in R^n$ задает вложение исходного аттрактора почти при любом выборе наблюдаемой переменной, если n не меньше удвоенной размерности исходного аттрактора. Для оценки характеристик реального исследуемого аттрактора можно вычислять характеристики восстановленного аттрактора. С целью уменьшения ошибки, обусловленной конечностью набора экспериментальных точек $\{S_k\}_{k=0}^{M-1}$, необходимо проводить расчеты при нескольких различных значениях M и n и добиваться независимости получаемых оценок характеристик от M и n в пределах заданной точности [17].

Для малых шагов по времени Δt значения S_k и S_{k+1} будут близкими, поэтому большое значение приобретает правильный выбор временной задержки t. Необходимо стремиться выбрать t так, чтобы корреляция между S_k и S_{k+1} была по возможности минимальной. Традиционный способ выбора временной задержки состоит в вычислении автокорреляционной функции временного ряда [18]:

$$B(\tau) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(S_k - \bar{S})(S_{k+\tau} - \bar{S}), \quad m = M - \tau. \tag{24}$$

Задержка τ выбирается равной времени первого пересечения нуля автокорреляционной функции. Второй способ требует вычисления спектра мощности временного ряда, т. е. быстрого преобразования Фурье автокорреляционной функции. Если в спектре мощности присутствуют кратные пики, то задержка τ выбирается равной четверти периода самой высокой из доминирующих частот. Третий способ основан на вычислении средней взаимной информации между двумя измерениями. Пусть даны два множества измерений A и B. Взаимная информация между элементом a_i множества A и элементом b_j множества B определяется как количество информации, которое имеют измерения a_i и b_j по отношению к друг другу:

$$I_{a_i b_j} = \ln\left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)}\right]. \tag{25}$$

Если измерения независимы, то взаимная информация равна нулю. Усредняя по всем измерениям, получаем:

$$I_{AB} = \sum_{a,b} P_{AB}(a_i, b_j) \ln\left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i) P_B(b_j)}\right] . \qquad (26)$$

Заменяя a_i и b_j на S_k и S_{k+t} соответственно, получаем среднюю взаимную информацию как функцию временной задержки τ. Задержка τ выбирается равной времени первого минимума во взаимной информации [8, 18].

В случае модельных данных, когда нам известна размерность n фазового пространства динамической системы и все n координат каждой точки на аттракторе, корреляционную размерность D_2 аттрактора находят следующим образом [8].

Рассмотрим корреляционный интеграл $C(r)$, показывающий относительное число пар точек аттрактора, находящихся на расстоянии, не большем r:

$$C(r) = \frac{1}{m(m-1)/2} \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \theta(r - p(x_i, x_j)) , \qquad (27)$$

здесь θ — функция Хевисайда:

$$\theta(\alpha) = \{^{1, \alpha \ge 0}_{0, \alpha < 0} ; \qquad (28)$$

p — расстояние в n-мерном фазовом пространстве; m — число точек x_i на аттракторе.

Если выполняется условие

$$C(r) \approx r^{D_2} , \qquad (29)$$

то D_2 считают корреляционной размерностью аттрактора.

Справедливость приведенного степенного закона ограничена значениями r, достаточно малыми по сравнению с размером аттрактора. При увеличении r величина $C(r)$ достигает насыщения $C(r) \to 1$ (при r, сравнимых с размером аттрактора). С другой стороны, при очень малых значениях r число пар точек x_i, x_j, расстояние между которыми не превышает r, становится малым (из-за конечности числа точек на аттракторе) и статистика становится бедной. Кроме того, приобретает решающее значение влияние инструментальных ошибок измерения сигнала. Следовательно, на практике степенной закон выполняется только в ограниченном диапазоне значений r (так называемом скейлинговом диапазоне), который и может быть использован для определения размерности аттрактора.

Учитывая, что из (29) следует [16, 18]

$$\ln C(r) \approx D_2 \ln r , \qquad (30)$$

получаем оценку размерности аттрактора как тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей график корреляционного интеграла $C(r)$ в двойном логарифмическом масштабе.

В случае экспериментальных данных мы обычно не знаем размерность фазового пространства системы и располагаем информацией только об одной координате точек на аттракторе. Поэтому все расчеты проводятся для нескольких размерностей фазового пространства n = 1, 2, 3... Для восстановления аттрактора используется метод Такенса. При этом корреляционная размерность аттрактора $D_2(n)$ сначала возрастает, но затем обычно выходит на постоянный уровень $D_2(n) \sim D_2$. Таким образом, получают искомую корреляционную размерность D_2 аттрактора и оценку размерности фазового пространства системы $n \le 2D_2 + 1$. Если же выходной сигнал динамической системы сильно зашумлен, то размерность аттрактора постоянно растет.

Как уже говорилось выше, для диссипативной системы характерно сжатие объемов в фазовом пространстве, что приводит к потере информации. Скорость потери информации определяется с помощью энтропии Колмогорова. Она измеряет информацию за единицу времени для серии следующих друг за другом измерений и рассматривает динамику процесса.

Произведем разбиение фазового пространства, включающего в себя аттрактор, на $M(\varepsilon)$ непересекающихся n-мерных кубиков с ребром ε. Проделаем m последовательных измерений, следя за фазовой траекторией и через равные промежутки времени t отмечая кубики s_i, в которых побывала траектория. При каждом независимом испытании получим конкретную реализацию в виде последовательности кубиков s_i, ..., s_m. Пусть нам известны вероятности $P(s_i, ..., s_m)$ появления всех возможных последовательностей кубиков. Тогда энтропия Колмогорова определяется следующим образом [8]:

$$K_1 = -\lim_{\tau \to 0} \lim_{t \to 0} \lim_{m \to 0} \left[\frac{1}{m\tau} \sum_{\tau_1 \ldots \tau_m} P(s_i, \ldots, s_m) \ln P(s_i, \ldots, s_m) \right]. \quad (31)$$

Корреляционная энтропия K_2 может быть определена следующим образом. Для этого также вычисляют корреляционный интеграл (27), но рассматривают не только его зависимость от расстояния r, но и от размерности фазового пространства n. При этом полагают, что

$$C(r, n) \sim r^{D2} \exp(-nK_2), \quad (32)$$

откуда

$$K_2(r, n) = \ln \frac{C(r, n)}{C(r, n+1)}. \quad (33)$$

Корреляционная энтропия аппроксимируется в приемлемом диапазоне значений r и n [8].

Характерное время, на которое может быть предсказано поведение системы, обратно пропорционально энтропии Колмогорова. Если энтропия достигает нуля, то система становится полностью предсказуемой (критерий минимума производства энтропии).

Таким образом, жизнеспособность (или устойчивость) макросистемы оценивается на основе выбранных показателей, представленных временными рядами, с помощью критерия минимума производства энтропии.

Литература

1. *Базаров И. П.* Термодинамика. М.: Высш. шк., 1991. 412 с.

2. *Боссель Х.* Показатели устойчивого развития: Теория, метод, практическое использование. Отчет, представленный на рассмотрение Балатонской группы / Пер. с англ. Под ред. Цибульского В. Р. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2001. 123 с.

3. *Волькенштейн Л. Е.* Энтропия и информация. М.: Наука, 1986. 264 с.

4. *Глазов В. М., Павлова Л. М.* Химическая термодинамика и фазовые равновесия. М., 1988. 318 с.

5. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 287 с.

6. *Журавлев В. А.* Термодинамика необратимых процессов: В задачах и решениях. Ижевск: Удмурт. ун-т, 1998. 151 с.

7. *Ивченко Б. П., Мартыщенко Л. А., Табухов М. Е.* Управление в экономических и социальных системах. Системный анализ. Принятие решений в условиях неопределенности. СПб.: Нордмед-Издат, 2001. 248 с.

8. *Колмогоров А. Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов. РАН СССР, Т. 124, 1959. С. 750–755.

9. *Кудинов В. А., Карташов Э. М.* Техническая термодинамика: Учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк., 2000. 261 с.

10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 565 с.

11. *Пригожин И.* Время, структура и флуктуации // Успехи физических наук. М.: Наука, 1980. Т. 131, вып. 2.

12. *Пригожин И., Николис Г.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 234 с.

13. *Ресин В. И., Попков Ю. С.* Развитие больших городов в условиях переходной экономики (системный подход). М.: Эдиториал УРСС, 2000. С. 328.

14. *Цибульский В. Р.* Методология ООН. Системный подход к выбору показателей оценки устойчивого развития территорий // Проблемы взаимодействия человека и природной среды: Материалы итоговой научной сессии Ученого совета Института проблем освоения Севера СО РАН 2000 г. Вып. 2. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2001. 136 с.

15. *Юзвишин И. И.* Информациология. М.: Наука, 1996. 567 с.

16. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors. Phys. Rev. Lett. 50, 1983. P. 346–349.

17. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence. In: Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics, edited by D. A. Rand, L. S. Young. Heidelberg: Springer-Verlag, 1981. P. 366–381.

18. *Theiler J.* Estimating the fractal dimension of chaotic time series. Lincoln Lab. J. 3, 1990. P. 63–86.