

А. Н. Паршуков, И. Г. Соловьев
МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ РОБАСТНОСТИ
МОДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Работа посвящена задаче повышения степени грубости (робастности) динамической системы с модальным регулятором в условиях структурных возмущений объекта.

Введение

Задачи синтеза модальных регуляторов в условиях структурных возмущений объекта рассматривались во многих работах [6, 7]. Используя обозначения [9], дадим краткие пояснения исследуемым вопросам.

Пусть объект управления P задается уравнением [1]

$$e^2(x, s) \times a(n, s) x(t) = e^{\phi}(x, s) \times b(m, s) u(t)$$

или кратко

$$P = \langle e''(\cdot, s) \cdot a(n, s), e'(\cdot, s) \cdot b(m, s) \rangle, \quad (1)$$

где $P_0 = \langle a(n, s), b(m, s) \rangle$ — оператор доминирующей динамики [9], а

$$P_e = \langle e^2(x, s), e^{\phi}(x, s) \rangle, \quad e^2(x, s) / e^{\phi}(x, s) |_{s=0} = 1$$
 —

операторы структурных возмущений с «хорошими» запасами устойчивости.

Желаемые динамические свойства в условиях $P_e \neq \emptyset$ задаются эталонным оператором замкнутой системы $a^0(2n-1, s)$. При этом алгоритмы расчета параметров регулятора

$$\beta(n-1, p) u(t) = \alpha(n-1, p) x(t) + b^1(n-1, p) g(t) \quad (2)$$

следуют из равенства [1]

$$a^0(2n-1, s) = a(n, s) \cdot \beta(n-1, s) - b(m, s) \cdot \alpha(n-1, s). \quad (3)$$

Очевидно, при наличии $P_e \neq \emptyset$ достигнуть эталонных свойств на основе (2) невозможно. Поэтому более конструктивной видится задача об обеспечении желаемых свойств, заданных односвязной областью

$$S \subset C^1$$

желаемого расположения корней характеристического полинома (ХП) замкнутой системы. В условиях (1)-(3) ХП вычисляется по выражению

$$e(\cdot, s) \cdot a^0(2n-1, s) = e''(\cdot, s) \cdot a(n, s) \cdot \beta(n-1, s) - e'(\cdot, s) \cdot b(m, s) \cdot \alpha(n-1, s). \quad (4)$$

В [2] показано, что, если корни оператора возмущений расположены внутри области S , т. е.

$$\lambda(e''(\cdot, s)) \subset \text{int } S, \quad (5)$$

для обеспечения целевого условия задачи синтеза (4)

$$\lambda(e(\cdot, s) \cdot a^0(2n-1, s)) \subset \text{int } S \quad (6)$$

достаточно выполнения условия

$$\rho(r) = \min_{s \in S} (F(r, s) - W_e(s)) > 0, \quad (7)$$

где

$$\Phi(r, s) = \left| \frac{a^0(2n-1, s)}{b(m, s) \cdot \alpha(n-1, s)} \right|^2, \quad W_e(s) = \left| \frac{e''(\cdot, s) - e'(\cdot, s)}{e''(\cdot, s)} \right|^2,$$

а $a^3(2n-1, s)$ удовлетворяет (3).

В выражении (7) вектор $r \in R^{2n-1}$ представляет собой вектор параметрических настроек регулятора

$$u^{(n-1)}(t) + \beta_{n-2} u^{(n-2)}(t) + \dots + \beta_1 u(t) + \beta_0 u(t) = \alpha_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 x(t) + \alpha_0 + b^1(n-1, s) g(t).$$

т. е.

$$r = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-2} | \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]^T = [\beta \quad | \quad \alpha \quad]^T, \quad (8)$$

вычисляемый также из условия (3).

Доставляемые целевым условием (5), (6) свободы в выборе эталона $a^3(2n-1, s)$ и, как следствие, параметров регулятора (8) будем использовать для усиления свойств грубости, или робастности (7). Таким образом, задача о создании системы модального регулирования в условиях (3), (6) с максимальным уровнем робастности сводится к экстремальной вида

$$\rho(r) \rightarrow \max_r, \quad (9)$$

где $\rho(\cdot)$ и r из (7) и (8).

Прежде чем перейти к анализу алгоритма решения задачи (9), отметим ряд полученных свойств изложенной выше постановки задачи регулирования.

Переход от целевого условия с точечным эталонным оператором (3) к эталонному множеству S желаемого расположения корней ХП замкнутой системы (6) оказывается более конструктивным, как в прикладном, методологическом, так и в теоретическом аспекте.

- Существенно расширяется арсенал методов и подходов к технологии синтеза и анализа систем регулирования.

- Введенные операторы структурных возмущений P_e могут содержать значительную долю неопределенности описания модели объекта. В условиях (7) множество моделей структурных возмущений, вообще говоря, задается верхней оценкой графика (7)

$$W_e^*(s) = \text{sp } W_e(s), \quad s \in \partial S,$$

при соблюдении отношения (5)

$$\lambda(e''(\cdot, s)) \subset \text{int } S.$$

Заметим, что никаких дополнительных условий структурно-параметрического плана на P_e не накладывается. В частности, парой P_e могут быть бесконечномерные операторы.

Некоторое сужение класса допустимых решений происходит при переходе от области S к множеству эталонных операторов $A^3(\cdot, s)$, заданных в структурно-параметрической форме таких, что выполнено

$$\lambda(A^3(\cdot, s)) \subset \text{int } S. \quad (10)$$

Технология синтеза регуляторов (3) при этом оказывается более гибкой в аналитическом плане, особенно если множество $A^3(x, s)$ имеет простой вид интервального оператора [1] либо оператора с эллиптической областью разброса параметров [3].

- Заметим, что задача о создании регулятора на паре $\langle P, S \rangle$ (1), (5) с максимально грубыми свойствами

(9) может рассматриваться и в условиях, когда структурные возмущения отсутствуют, $P_e \neq \emptyset$.

В этом случае $e^2(\cdot, s) = e^1(\cdot, s) = 1$ и $W_e(s) = 0$ (7). Кстати говоря, данная постановка соответствует общей ситуации, когда операторная информация о паре P_e хотя бы в виде (9) отсутствует.

- Если модель доминирующей динамики (1) наделяется качеством параметрической неопределенности

$$P_0 = \langle a(n, s) + \Delta a(n-1, s), b(m, s) + \Delta b(m, s) \rangle, \quad (11)$$

$\Delta a(n-1, s)$ и $\Delta b(m, s)$

где, к примеру, — симметричные по параметрам интервальные операторы, то критерий робастности (7) видоизменяется:

$$\rho(r) = \min_{s \in \partial S} (\Phi^-(r, s) - W_s^*(s)) \rightarrow \max_{r \in [a, b]^T}, \quad (12)$$

где [2]

$$\Phi^-(r, s) = \min_{\Delta a, \Delta b} \left| \frac{(a + \Delta a) \cdot \beta - (b + \Delta b) \cdot \alpha}{(b + \Delta b) \cdot \alpha} \right|^2.$$

Основной результат. Алгоритм повышения робастности

Рассмотрим итеративную схему решения экстремальной задачи (7)–(9). Алгоритм максимизации критерия (9) по параметрам вектора r будем искать в классе градиентных стратегий вида [5]:

$$r(k+1) = r(k) + \gamma(k) \cdot z(k), \quad (13)$$

где $z(k)$ — псевдоградиентное направление поиска [4], т. е. $z^T(k) \cdot \text{grad} \rho(r) > 0$;

$\gamma(k)$ — шаг поиска;

k — номер итерации;

Особенность задачи в том, что критерий (7), (8) назначается функциональным условием (7), обращенным к графику функции, вычисленной вдоль границы ∂S области S :

$$\rho(r(k), s) = \Phi(r(k), s) - W_s^*(s), \quad s \in \partial S \quad (14)$$

(рис.).

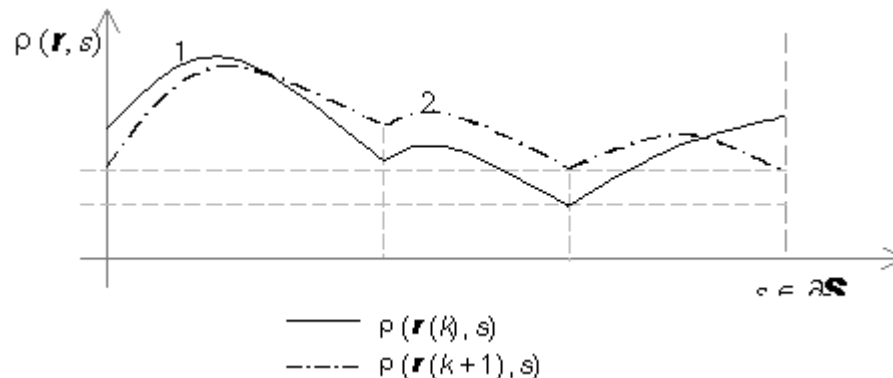


Рис. Иллюстрация алгоритма повышения уровня робастности

Всякая вариация $r(k)$ (13), направленная на подъем нижней границы $\rho(r(k+1)) > \rho(r(k))$ графика $\rho(r(k), s)$, считается удачной (см. рис., кривая 2).

Принцип построения алгоритма (13) поясним на основе приведенных графиков рис. Пусть на k -й итерации график функции $\rho(r(k), s), s \in \partial S$, имеет вид 1. В соответствии с (13) для вычисления новых настроек $r(k+1)$ необходимо указать направление $z(k)$ и шаг $\gamma(k)$ поиска, а также сформулировать условия останова.

Выбор направления $z(k)$.

$$s(k, j) \in \partial S, \quad j \in J(k), \quad \text{где функция } \rho(r(k), s)$$

Шаг 1. Определение точек

принимает минимальные

значения. Способ вычисления вектора зависит от количества точек минимума $s(k, j)$, т. е. от мощности $\mu J(k)$ множества $J(k)$.

Будем рассматривать две ситуации. Первая — когда точка минимума единственная, т. е. $\mu J(k) = 1$ и $s(k) = s(k, 1)$ (см. рис., кривая 1). Вторая — когда число точек минимума больше единицы, т. е. $\mu J(k) = n(k)$, и мы имеем набор значений

$$s(k, 1), s(k, 2) \dots s(k, n(k)), \quad (15)$$

где функция (14) достигает нижней грани (см. рис., кривая 2). Случай, когда

$$n(k) \rightarrow \infty,$$

т. е. график некоторыми участками «ложится» на уровень нижней грани, будем эквивалентировать со второй ситуацией, назначая равномерную сетку точек $s(k, j)$ в пределах этих участков.

Таким образом:

Шаг 2. Анализ мощности $\mu J(k)$. Если $\mu J(k) = 1$, то перейти к следующему шагу; в противном случае — $\mu J(k) > 1$ — перейти к шагу 5.

Шаг 3. Вычисление вектора градиента:

$$\mathbf{z}(k) = \text{grad}_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, s) \Big|_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{r}(k) \\ s=s(k)}}.$$

Способ вычисления градиента от функции (14) по параметрам вектора (8) в условиях (7) и (3) поясняется в приложении I.

Шаг 4. Анализ условия останова

$$\mathbf{z}(k) = 0. \quad (16)$$

Ситуация $\mathbf{z}(k) = 0$ будет оцениваться как состояние настроек, отвечающее условию поставленной задачи (9), т. е. условию максимума. Иначе говоря, для минимального значения функции

$$\rho(\mathbf{r}(k), s(k)) \text{ на } s \in \partial S,$$

вычисленной при настройках $\mathbf{r}(k)$, не существует вариаций

$$\gamma \cdot z \quad (\gamma > 0 \text{ — бесконечно малое число})$$

от $\mathbf{r}(k)$, в которых был бы возможен максимальный подъем, т. е.

$$\neg \exists z \neq 0 : \rho(\mathbf{r}(k) + \gamma \cdot \mathbf{z}(k), s(k)) > \rho(\mathbf{r}(k), s(k)).$$

Иными словами, условие (16) есть одно из условий останова алгоритма (13), при этом $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(k)$, а

достигнутый уровень $\rho_* = \rho(\mathbf{r}_*)$ соответствует максимальному уровню робастности.

Шаг 5. В условиях $\mu J(k) > 1$ вычисляется полное множество градиентных направлений

$$\mathbf{z}(k, j) = \text{grad}_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, s) \Big|_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{r}(k) \\ s=s(k)}}, j \in J(k). \quad (17)$$

При данных обстоятельствах любой ненулевой вектор $\mathbf{z}(k)$, удовлетворяющий отношениям

$$\mathbf{z}(k)^T \times \mathbf{z}(k, j) > 0, \quad (18)$$

одновременно для $j \in J(k)$ отвечает условиям квазиградиента и обеспечивает локальный подъем функции $\rho(\mathbf{r}(k))$ (7) вдоль $\mathbf{z}(k)$. Алгоритм поиска такого $\mathbf{z}(k)$ (18) (если он существует) приводится в приложении II.

Шаг 6. Если решение задачи (18) не существует, то это означает, что не существует такого направления $\mathbf{z}(k)$, обеспечивающего в минимальных точках $s(k, j)$ графика $\rho(\mathbf{r}(k), s)$ (14) условия одновременного локального подъема. Но последнее и означает, что мы достигли при настройках $\mathbf{r}(k)$ искомого результата (7), (9). Иными словами, несуществование $\mathbf{z}(k)$, удовлетворяющего (17) для $j \in J(k)$, и есть второе условие останова алгоритма поиска (13).

После определения ненулевого направления $\mathbf{z}(k)$ перейдем к схемам вычисления шага поиска $g(k)$.

Выбор шага поиска $g(k)$. Следуя типовым правилам синтеза итеративных градиентных схем [5], выбор шага осуществляем из отношения

$$g(k) = \min \{g_1(k), g_2(k)\}, \quad (19)$$

где $g_1(k)$ определяется условием на принадлежность корней ХП (3) с новыми $k + 1$ -ми настройками $\mathbf{r}(k+1) = [\beta(k+1)^{1/2} \alpha(k+1)]^T$ регулятора (7) к области \mathbf{S} (включая границу $\partial \mathbf{S}$)

$$\begin{cases} \beta(k+1) = \beta(k) + \gamma_1(k) \cdot \Delta \beta(k) \\ \alpha(k+1) = \alpha(k) + \gamma_1(k) \cdot \Delta \alpha(k). \end{cases} \quad (20)$$

Указанное условие отражается записью

$$1(a^3(k) + g_1(k) \times Da(k)) \hat{\mathbf{I}} \mathbf{S} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{S}, \quad (21)$$

где

$$a^3(k) = a \times b(k) - b \times a(k), \quad (22.a)$$

$$Da(k) = a \times \mathbf{z}_b(k) - b \times \mathbf{z}_a(k), \quad (22.b)$$

здесь

$$\mathbf{z}(k) = [\mathbf{z}_b(k)^{1/2} \mathbf{z}_a(k)]^T.$$

Параметр $g_2(k)$ определяется из условия «наискорейшего подъема» [5]:

$$\gamma_2(k) = \arg \max_{\gamma \in [0, \gamma_1(k)]} \rho(\mathbf{r}(k) + \gamma \cdot \mathbf{z}(k)). \quad (23)$$

Алгоритм решения однопараметрической задачи (23) может соответствовать схеме половинного деления или «золотого сечения» [8] на отрезке $[0, g_1(k)]$. Учитывая функциональный характер определения $\gamma(\mathbf{r}(k))$ (7), следует помнить, что при каждой итерации по g вычисление $\gamma(\mathbf{r}(k) + g \times \mathbf{z}(k))$ предполагает, вообще говоря, восстановление градиента функции $\gamma(\mathbf{r}(k) + g \times \mathbf{z}(k), s)$, $s \in \mathbf{S}$, с последующим определением его минимального значения (7).

Алгоритм оценки $g_1(k)$ по условию (21) приведен в приложении III.

Приложение I

Вычисление градиента функции $\gamma(\mathbf{r}, s)$. Обратимся к вычислению [3]

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, s) \Big|_{\substack{\mathbf{r}=\mathbf{r}(k) \\ s=s(k)}}.$$

Заметим, что в функции

$$\gamma(\mathbf{r}, s) = F(\mathbf{r}, s) - W_e(s)$$

от параметров регулятора \mathbf{r} зависит только функция $F(\mathbf{r}, s)$:

$$F(\mathbf{r}, s) = \left| \frac{a(n, s) \cdot \beta(n-1, s) - b(m, s) \cdot \alpha(n-1, s)}{b(m, s) \cdot \alpha(n-1, s)} \right|^2. \quad (1.1)$$

Отсюда следует, что

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} \gamma(\mathbf{r}, s) = \text{grad}_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}, s).$$

Для вычисления $\text{grad}_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}, s)$ нам будет удобно представить функцию (1.1) в виде

$$F(\mathbf{r}, s) = \left| \frac{\mathbf{v}^T(s) \cdot \mathbf{r} + v^0(s)}{\mathbf{w}^T(s) \cdot \mathbf{r}} \right|^2,$$

здесь компоненты векторов $\mathbf{v}(s)$ и $\mathbf{w}(s)$ и функция $v^0(s)$ (s), в общем случае, являются комплексными числами, зависящими от s (правила вычисления $\mathbf{v}(s)$,

$\mathbf{w}(s)$ и $v^0(s)$ приводятся ниже). Далее нам будет удобно временно опустить зависимость $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{w}(s)$ и $v^0(s)$ от s .

Представив \mathbf{v} , \mathbf{w} и v^0 в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_R + j \times \mathbf{v}_I, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_R + j \times \mathbf{w}_I, \quad v^0 = v_R^0 + j \times v_I^0,$$

где j — мнимая единица ($\mathbf{v}_R, \mathbf{w}_R, v_R^0$ и $\mathbf{v}_I, \mathbf{w}_I, v_I^0$ составлены соответственно из действительных и мнимых компонент $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{w}(s)$ и $v^0(s)$), функцию $F(\mathbf{r}, s)$ окончательно можно представить в виде

$$F(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{v}_R^T \cdot \mathbf{r} + v_R^0)^2 + (\mathbf{v}_I^T \cdot \mathbf{r} + v_I^0)^2}{(\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r})^2}. \quad (1.2)$$

Очевидно, градиент функции (1.2) имеет следующий вид:

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}) = \frac{\left((\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r})^2 \right) \cdot \left[(\mathbf{v}_R^T \cdot \mathbf{r} + v_R^0) \cdot \mathbf{v}_R + (\mathbf{v}_I^T \cdot \mathbf{r} + v_I^0) \cdot \mathbf{v}_I \right]}{\left((\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r})^2 \right)^2} -$$

$$- \frac{\left((\mathbf{v}_R^T \cdot \mathbf{r} + v_R^0)^2 + (\mathbf{v}_I^T \cdot \mathbf{r} + v_I^0)^2 \right) \cdot \left[(\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_R + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_I \right]}{\left((\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r})^2 \right)^2},$$

или проще:

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} F(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{v}_R^T \cdot \mathbf{r} + v_R^0) \cdot \mathbf{v}_R + (\mathbf{v}_I^T \cdot \mathbf{r} + v_I^0) \cdot \mathbf{v}_I - \Phi(\mathbf{r}) \cdot \left[(\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_R + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}_I \right]}{\left((\mathbf{w}_R^T \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{w}_I^T \cdot \mathbf{r})^2 \right)^2}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathbf{v}(s) = (\mathbf{v}_1(s) \mid -\mathbf{v}_2(s))^T, \quad \mathbf{w}(s) = (\mathbf{0} \mid -\mathbf{v}_2(s))^T, \quad v^0(s) = s^{n-1} \times a(n, s),$$

где

$$\mathbf{v}_1(s) = \begin{pmatrix} a(n, s) \\ s \cdot a(n, s) \\ \text{M} \\ s' \cdot a(n, s) \\ \text{M} \\ s^{n-2} \cdot a(n, s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2(s) = \begin{pmatrix} b(m, s) \\ s \cdot b(m, s) \\ \text{M} \\ s' \cdot b(m, s) \\ \text{M} \\ s^{m-1} \cdot b(m, s) \end{pmatrix},$$

вектор $\mathbf{0}$ — вектор размерности $n - 1$, коэффициенты которого — нули; и

$$\mathbf{v}_R(s) = (\mathbf{v}_1^R(s) \mid -\mathbf{v}_2^R(s))^T, \quad \mathbf{v}_I(s) = (\mathbf{v}_1^I(s) \mid -\mathbf{v}_2^I(s))^T,$$

$$\mathbf{w}_R(s) = (\mathbf{0} \mid -\mathbf{v}_2^R(s))^T, \quad \mathbf{w}_I(s) = (\mathbf{0} \mid -\mathbf{v}_2^I(s))^T,$$

$$v_R^0(s) = \operatorname{Re}(s^{n-1} \cdot a(n, s)), \quad v_I^0(s) = \operatorname{Im}(s^{n-1} \cdot a(n, s)),$$

где

$$\mathbf{v}_1^R(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a(n, s)) \\ \operatorname{Re}(s \cdot a(n, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Re}(s' \cdot a(n, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Re}(s^{n-2} \cdot a(n, s)) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^R(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(b(m, s)) \\ \operatorname{Re}(s \cdot b(m, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Re}(s' \cdot b(m, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Re}(s^{m-1} \cdot b(m, s)) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1^I(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(a(n, s)) \\ \operatorname{Im}(s \cdot a(n, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Im}(s' \cdot a(n, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Im}(s^{n-2} \cdot a(n, s)) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^I(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(b(m, s)) \\ \operatorname{Im}(s \cdot b(m, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Im}(s' \cdot b(m, s)) \\ \text{M} \\ \operatorname{Im}(s^{m-1} \cdot b(m, s)) \end{pmatrix}.$$

Приложение II

Задача поиска «общего» направления. Пусть заданы L $2n - 1$ — мерных единичных, не повторяющихся векторов [4]

$$\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j), \dots, \mathbf{z}(L). \quad (\text{II.1})$$

Требуется найти вектор $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{2n-1}$ такой, что выполнены

$$\begin{cases} \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(1) > 0 \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(2) > 0 \\ \text{M} \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(j) > 0 \\ \text{M} \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(L) > 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

(конечно, если такой вектор вообще существует).

Решать поставленную задачу будем в следующих условиях. Предположим, что система (II.2) разрешима в усиленном смысле, т. е. существует вектор \mathbf{n}^* такой, что

$$\begin{cases} \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(1) \geq \varepsilon_* > 0 \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(2) \geq \varepsilon_* > 0 \\ \text{M} \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(j) \geq \varepsilon_* > 0 \\ \text{M} \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{z}(L) \geq \varepsilon_* > 0, \end{cases}$$

т. е. множество решений рассматриваемой системы неравенств — открытое множество.

В этом случае известно [10], что решение задачи (II.1), (II.4) может быть найдено при помощи следующего алгоритма

$$\mathbf{n}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{n}(k), & \text{если } \mathbf{n}(k)^T \cdot \mathbf{z}(j(k)) > 0 \\ \mathbf{n}(k) + \alpha \cdot \mathbf{z}(j(k)), & \text{если } \mathbf{n}(k)^T \cdot \mathbf{z}(j(k)) \leq 0. \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Здесь как $\mathbf{z}(j(k))$ обозначен некоторый вектор из множества (II.1), выбор которого определяется итерацией k ; α — постоянное число ($\alpha > 0$). В качестве $\mathbf{n}(0)$ может выбираться произвольный вектор, например:

$$\mathbf{n}(0) = \frac{\sum_{j=1}^L \mathbf{z}(j)}{L}.$$

Известно [10], что алгоритм (II.3) сводится к решению задачи (II.1), (II.2) за конечное (но не известное заранее) число шагов. В нашей работе для решения задачи (II.1), (II.2) предлагается следующая модификация алгоритма (II.3).

Алгоритм итеративного поиска \mathbf{n} . Пусть на k -й итерации мы нашли вектор $\mathbf{n}(k)$ такой, что с j векторами из множества (II.1) (примем для удобства дальнейших выкладок, что эти вектора: $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j)$) выполнено

$$\begin{cases} \mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(1) \geq \varepsilon(k) > 0 \\ \mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(2) \geq \varepsilon(k) > 0 \\ \quad \quad \quad \text{M} \\ \mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(j) \geq \varepsilon(k) > 0 \end{cases}$$

и

$$\mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(j+1) < \varepsilon(k).$$

Новое приближение $\mathbf{n}(k+1)$ будем искать из условия

$$\begin{cases} \mathbf{n}^T(k+1) \cdot \mathbf{z}(1) \geq \varepsilon > 0 \\ \mathbf{n}^T(k+1) \cdot \mathbf{z}(2) \geq \varepsilon > 0 \\ \quad \quad \quad \text{M} \\ \mathbf{n}^T(k+1) \cdot \mathbf{z}(j) \geq \varepsilon > 0 \\ \mathbf{n}^T(k+1) \cdot \mathbf{z}(j+1) \geq \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

(здесь, возможно, $\varepsilon \in \varepsilon(k)$).

Будем искать $\mathbf{n}(k+1)$ в виде

$$\mathbf{n}(k+1) = \mathbf{n}(k) + \alpha(k) \times \mathbf{z}(j+1), \quad (\alpha(k) > 0). \quad (\text{II.5})$$

При этом задача сводится к поиску такого $\mathbf{n}(k+1)$, что для (II.5) выполняется (II.4).

Случай, когда не существует такого $\mathbf{n}(k+1)$, что для (II.5) выполняется (II.4), будем считать остановом алгоритма.

Условия, накладываемые на выбор $\alpha(k)$. Подставляя (II.5) в (II.4), получаем следующие условия на $\alpha(k)$.

· Из

$$\mathbf{n}^T(k+1) \cdot \mathbf{z}(j+1) > \varepsilon > 0$$

следует

$$\mathbf{n}^T(k) \times \mathbf{z}(j+1) + \alpha(k) \times \|\mathbf{z}(j+1)\|^2 \geq \varepsilon > 0,$$

или окончательно

$$a(k) \geq \frac{\varepsilon - \mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(j+1)}{\|\mathbf{z}(j+1)\|^2} \quad (II.6)$$

Из

$$\mathbf{n}^T(k+1) \cdot \mathbf{z}(j) > \varepsilon > 0, \quad i \in \overline{1, j}$$

следует

$$\mathbf{n}^T(k) \times \mathbf{z}(i) + a(k) \times \mathbf{z}^T(j+1) \times \mathbf{z}(i) \geq \varepsilon > 0, \quad i \in \overline{1, j} \quad (II.7)$$

Заметим, что не все условия из системы неравенств (II.7) являются значимыми. Действительно, в тех случаях, когда выполняется

$$\mathbf{z}^T(j+1) \times \mathbf{z}(i) \geq \varepsilon > 0,$$

увеличение $a(k)$ не приводит к нарушению неравенств

$$\mathbf{n}^T(k) \times \mathbf{z}(i) + a(k) \times \mathbf{z}^T(j+1) \times \mathbf{z}(i) \geq \varepsilon.$$

Опасность представляют только те случаи, когда выполняется

$$\mathbf{z}^T(j+1) \times \mathbf{z}(i) < 0.$$

Такие вектора будем условно называть «опасными».

Составим индексное множество $I(k)$ «опасных» векторов

$$I(k) = \{i: \mathbf{z}^T(j+1) \times \mathbf{z}(i) < 0, i \in \overline{1, j}\}.$$

При этом условии на $a(k)$ (II.7) можем записать в виде

$$\mathbf{n}^T(k) \times \mathbf{z}(i) + a(k) \times \mathbf{z}^T(j+1) \times \mathbf{z}(i) \geq \varepsilon > 0, \quad i \in I(k),$$

или окончательно

$$a_i(k) \geq \frac{\mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(i) - \varepsilon}{-\mathbf{z}^T(j+1) \cdot \mathbf{z}(i)}, \quad i \in I(k).$$

При этом следует выбирать

$$a(k) = \min_{i \in I(k)} \{a_i(k)\}.$$

Из условий (II.6) и (II.8) непосредственно следует утверждение.

Утверждение (Условие выбора $a(k)$). Пусть условие

$$\frac{\varepsilon - \mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(j+1)}{\|\mathbf{z}(j+1)\|^2} \geq \min_{i \in I(k)} \frac{\mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(i) - \varepsilon}{-\mathbf{z}^T(j+1) \cdot \mathbf{z}(i)} \quad (II.9)$$

выполнено. Тогда вектор (II.5) с любым $a(k)$, выбираемым из условия

$$\frac{\varepsilon - \mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(j+1)}{\|\mathbf{z}(j+1)\|^2} \geq a(k) \geq \min_{i \in I(k)} \frac{\mathbf{n}^T(k) \cdot \mathbf{z}(i) - \varepsilon}{-\mathbf{z}^T(j+1) \cdot \mathbf{z}(i)},$$

обеспечивает выполнение условия (II.4).

Если условие (II.9) не выполняется, тогда не существует $a(k)$ такого, что для вектора (II.5) выполняется условие (II.4).

Из этих рассуждений можно сделать вывод: алгоритм (II.5) сводится к решению задачи (II.1)–(II.2) (конечно, если оно существует) за число шагов не превышающее L .

Приложение III

Поиск g_1 . Рассмотрим следующую задачу: требуется вычислить g_1 , выводящее корни эталона [5]

$$a^3(s) + g \times Da(s) \quad (III.1)$$

на границу области S .

Условие выхода корней эталона (III.1) на границу области S в точке s имеет вид

$$a^3(s) + g \times Da(s) = 0. \quad (III.2)$$

При фиксированной точке s условие (III.2) становится уравнением относительно g . Обратимся к рассмотрению следующей задачи.

Поиск g , выводящего корни эталона (III.1) на границу области S в точке s . Пусть на контуре ∂S выбрана точка s . Будем искать g ($g = g(s)$) такой, что является решением уравнения

$$a^3(s) + g \times Da(s) = 0. \quad (III.3)$$

Выделив в правой части (III.3) действительную

$$a_{\mathcal{R}}^3(s) + g \times D a_{\mathcal{R}}(s)$$

и мнимую

$$a_{\mathcal{I}}^3(s) + g \times D a_{\mathcal{I}}(s)$$

части, условие (III.3) можем записать в виде

$$\begin{cases} a_{\mathcal{R}}^3(s) + \gamma \cdot \Delta a_{\mathcal{R}}(s) = 0 \\ a_{\mathcal{I}}^3(s) + \gamma \cdot \Delta a_{\mathcal{I}}(s) = 0. \end{cases} \quad (III.4)$$

Таким образом, задача нахождения $g(s)$ сводится к решению системы уравнений (III.4) относительно g . Заметим, что решение системы (III.4) существует не всегда.

Условия существования решения системы (III.4). Из алгебры известно, что решение системы (III.4) не существует в случае, если в точке s выполнены условия

$$D a_{\mathcal{R}}(s) \neq 0, D a_{\mathcal{I}}(s) \neq 0$$

и

$$a_{\mathcal{R}}^3(s) \cdot \Delta a_{\mathcal{I}}(s) + a_{\mathcal{I}}^3(s) \cdot \Delta a_{\mathcal{R}}(s) \neq 0.$$

Во всех остальных случаях решение системы (III.4) существует.

Теперь в условиях, когда решение задачи (III.4) существует, установим правила вычисления $g(s)$.

При этом очевидно следующее утверждение.

Утверждение. (Правила вычисления $g(s)$.)

1) Пусть в точке s выполняются условия

$$D a_{\mathcal{R}}(s) \neq 0, D a_{\mathcal{I}}(s) = 0,$$

тогда

$$g(s) = \frac{\Delta a_{\mathcal{R}}(s)}{\Delta a_{\mathcal{R}}(s)}.$$

2) Пусть в точке s выполняются условия

$$D a_{\mathcal{R}}(s) = 0, D a_{\mathcal{I}}(s) \neq 0,$$

тогда

$$g(s) = \frac{\Delta a_{\mathcal{I}}(s)}{\Delta a_{\mathcal{I}}(s)}.$$

3) Пусть в точке s выполняются условия

$$D \bar{a}_R(s) \neq 0, D \bar{a}_I(s) \neq 0$$

и

$$a_R^*(s) \cdot \Delta a_I(s) + a_I^*(s) \cdot \Delta a_R(s) = 0,$$

тогда

$$g(s) = \frac{\Delta a_R(s)}{\Delta a_I(s)}.$$

При этом g_1 находится как минимальное значение $g(s)$ на сетке (15):

$$g_1 = \min \{g(s(1)), g(s(2)), \dots, g(s(j)), \dots, g(s(n))\}.$$

Литература

1. Паршуков А. Н. Схема синтеза модального регулятора для объекта с интервальной неопределенностью коэффициентов / Ин-т киосферы Земли СО РАН. Тюмень, 2001. 8 с. Деп. в ВИНТИ 09.07.2001, № 1616.
2. Паршуков А. Н. Методы расчета модального регулятора в условиях структурных возмущений / Ин-т киосферы Земли СО РАН. Тюмень, 2001. 8 с. Деп. в ВИНТИ 09.07.2001, № 1617.
3. Паршуков А. Н. Схема синтеза модального регулятора пониженного порядка / Ин-т киосферы Земли СО РАН. Тюмень, 2001. 23 с. Деп. в ВИНТИ 31.08.2001, № 1920.
4. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. 1973. № 3. С. 45–69.
5. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
6. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 45–55.
7. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Устойчивость и робастная устойчивость однопольных систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 91–104.
8. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике. М.: Мир, 1986. Т. 1. С. 49–57.
9. Соловьев И. Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск: Наука, 1992. 191 с.
10. Фомин В. Н. Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 236 с.

-
- [1] Здесь в операторах $e^{\lambda(x, s)}$ и $e^{\mu(x, s)}$ под точкой понимается произвольная (любая) положительная степень оператора.
- [2] Используется упрощенная форма записи операторов, с опущенными скобками аргументов.
- [3] Здесь индекс j точки $s(k, j)$ (см. запись (17)) мы опускаем.
- [4] Для удобства изложения здесь примем $\mathbf{n} = \mathbf{z}(k)$ и $\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(k, j)$ (17).
- [5] Здесь индекс итерации k по сравнению с записью (22) мы опустили.